УДК 519.911

Д. С. ДЖУМАБАЕВ, А. Б. ТЛЕУЛЕСОВА

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Методом параметризации исследуется периодическая краевая задача для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Построен алгоритм нахождения решения рассматриваемой задачи. Получены достаточные условия сходимости предложенного алгоритма и существование изолированного решения.

Математическое моделирование эволюционных процессов, подвергающихся действию кратковременных импульсных сил, приводит к необходимости исследования краевых задач для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [1, 2]. Несмотря на многочисленные исследования, посвященные вопросам разрешимости краевых задач с импульсным воздействием и построения приближенных методов нахождения их решений, разработка новых конструктивных методов изучения таких задач остается актуальной. В настоящей работе методом параметризации [3] исследуется периодическая краевая задача с импульсным воздействием для систем нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\quad t\in[0,T]\setminus\{t_j\},\quad j=\overline{1,m}\quad x\in R^n, \tag{1}$$

$$x(0)=x(T), \tag{2}$$

$$\Delta x|_{t=t_j}=J_j(x),\quad j=\overline{1,m}, \tag{3}$$

где $f:[0,T]\to R^n\times R^n$ – непрерывная вектор функция, $\|x\|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}|x_i|$.

Взяв $t_0=0$, $t_{m+1}=T$, произведем разбиение $[0,T)=\bigcup\limits_{r=1}^{m+1}[t_{r-1},t_r)$ и сужение функции $x(t)$ на r-й интервал $t\in[t_{r-1},t_r)$, обозначим $x_r(t)$. Через λ_r обозначим значение функций $x_r(t)$ в точке $t=t_{r-1}$. На каждом интервале $t\in[t_{r-1},t_r)$, произведя замену функции $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$, получим эквивалентную задаче (1)–(3) многоточечную краевую задачу с параметром:

$$\frac{du_r}{dt}=f(t,\lambda_r+u_r),\quad t\in[t_{r-1},t_r),$$
$$r=\overline{1,m+1},\quad u_r(t_{r-1})=0, \tag{4}$$

$$\lambda_1=\lambda_{m+1}+\lim_{t\to T-0}u_{m+1}(t), \tag{5}$$

$$\lambda_j+\lim_{t\to t_j-0}u_j(t)-\lambda_{j+1}=J_j(\lambda_{j+1}),\quad j=\overline{1,m}. \tag{6}$$

Если $x(t)$ – решение задачи (1)–(3), то система пар $(\lambda_r,u_r(t))$, $r=\overline{1,m+1}$, с элементами $\lambda_r=x(t_{r-1})$, $u_r(t)=x(t)-x_r(t_{r-1})$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,m+1}$ является решением задачи (4)–(6). Наоборот, если система пар $(\tilde\lambda_r,\tilde u_r(t))$, $r=\overline{1,m+1}$, решение задачи (4)–(6), то функция $\tilde x(t)$, определяемая равенствами: $\tilde x(t)=\tilde\lambda_r+\tilde u_r(t)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, $\tilde x(T)=\tilde\lambda_{m+1}+\lim\limits_{t\to T-0}\tilde u_{m+1}(t)$, будет решением задачи (1)–(3). Введение дополнительных параметров λ_r позволило получить начальные условия $u_r(t_{r-1})=0$ для функции $u_r(t)$, определенных на $t\in[t_{r-1},t_r)$. При фиксированном значении параметра λ_r задача Коши (4) на интервале $t\in[t_{r-1},t_r)$ эквивалентна нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_r(t)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}f(\tau,\lambda_r+u_r(\tau))d\tau,\quad r=\overline{1,m+1}. \tag{7}$$

Подставив вместо $u_r(\tau)$ соответствующую правую часть (7) и повторив этот процесс ν, $(\nu=1,2,...)$ раз, получим для функции $u_r(t)$ следующее представление:

$$u_r(t)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}f\Bigg(\tau_1,\lambda_r+\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_1}f\Bigg(\tau_2,\lambda_r+\ldots+$$
$$+\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}f(\tau_\nu,\lambda_r+u_r(\tau_\nu))d\tau_\nu\ldots\Bigg)d\tau_2\Bigg)d\tau_1,\quad r=\overline{1,m+1}. \tag{8}$$

Из (8), найдя $\lim_{t\to t_r-0} u_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$ и подставив соответствующие им выражения в (5), (6), получим систему нелинейных уравнений относительно параметров $\lambda_r \in R^n$:

$$\lambda_1 - \lambda_{m+1} - \int_{t_m}^{T} f\Bigg(\tau_1, \lambda_{m+1} + \ldots +$$

$$+ \int_{t_m}^{\tau_{\nu-1}} f\big(\tau_\nu, \lambda_{m+1} + u_{m+1}(\tau_\nu)\big) d\tau_\nu \ldots\Bigg) d\tau_1 = 0, \qquad (9)$$

$$\lambda_j + \int_{t_{j-1}}^{t_j} f\left(\tau_1, \lambda_j + \ldots + \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_j + u_j(\tau_\nu)) d\tau_\nu \ldots\right) \times$$

$$\times d\tau_1 - \lambda_{j+1} - J_j(\lambda_{j+1}) \quad 0, \quad j=\overline{1,m}, \qquad (10)$$

которую запишем в виде

$$Q_{\nu,\tilde{t}}(\lambda, u) = 0, \quad \lambda \in R^{n(m+1)}. \qquad (11)$$

Через $\tilde{C}\big([t_{r-1}, t_r), R^n\big)$ обозначим множество непрерывных и ограниченных на $[t_{r-1}, t_r)$ функций $u_r : [t_{r-1}, t_r) \to R^n$.

Решение многоточечной периодической краевой задачи (4)–(6), систему пар $(\lambda_r, u_r(t))$, $r=\overline{1,m+1}$ найдем по следующему алгоритму.

Шаг – 0. а) Начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} \in R^{n(m+1)}$ определяем из уравнения $Q_{\nu,\tilde{t}}(\lambda, 0) = 0$. б) Решив задачу Коши (4) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, находим $u_r^{(0)}(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r=\overline{1,m+1}$.

Предполагая, что при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ задача Коши (4) имеет решение $u_r^{(0)}(t) \in \tilde{C}([t_{r-1}, t_r), R^n)$, $r=\overline{1,m+1}$, взяв положительное ρ и неотрицательные функции $R_r(t) \in \tilde{C}([t_{r-1}, t_r), R^1)$, построим множества:

$$S\left(\lambda^{(0)}, \rho\right) = \Big\{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1})' \in R^{n(m+1)} :$$

$$: \left\|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\right\| < \rho, r=\overline{1,m+1}\Big\},$$

$$S\left(\lambda_j^{(0)}, \rho\right) = \left\{\lambda_j \in R^n : \left\|\lambda_j - \lambda_j^{(0)}\right\| < \rho\right\}, \ j=\overline{2,m+1},$$

$$S\left(u^{(0)}[t], R[t]\rho\right) =$$

$$= \Big\{\big(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{m+1}(t)\big)', u_r(t) \in \tilde{C}\big([t_{r-1}, t_r), R^n\big) :$$

$$: \left\|u_r(t) - u_r^{(0)}(t)\right\| < R[t]\rho, t \in [t_{r-1}, t_r), r \ \ \overline{1,m+1}\Big\},$$

$$G_0(R[t], \rho) = \Big\{(t,x) : t \in [0,T], \left\|x - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t)\right\| <$$

$$< [R_r(t) + 1]\rho, t \in [t_{r-1}, t_r), r=\overline{1,m+1},$$

$$\left\|x - \lambda_{m+1}^{(0)} - \lim_{t\to T-0} u_{m+1}^{(0)}(t)\right\| < \left[\lim_{t\to T-0} R_{m+1}(t) + 1\right]\rho, t=T\Big\}.$$

Шаг – 1. а) Подставляя найденные $u_r^{(0)}(t)$ в (11), определяем $\lambda^{(1)}$ из уравнения $Q_{\nu,\tilde{t}}(\lambda, u^{(0)}) = 0$. б) Решая задачу Коши (4) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, находим функции $u_r^{(1)}(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r=\overline{1,m+1}$. И так далее.

Продолжая процесс на k-ом шаге алгоритма, получаем систему пар $\left(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t)\right)$, $r=\overline{1,m+1}$. По $\left(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t)\right)$, $r=\overline{1,m+1}$ составим пару $\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)$, где $\lambda^{(k)} = \left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \ldots, \lambda_{m+1}^{(k)}\right)' \in R^{n(m+1)}$, $u^{(k)}[t] = \left(u_1^{(k)}(t), u_2^{(k)}(t), \ldots, u_{m+1}^{(k)}(t)\right)'$.

В терминах исходных данных задач (1)–(3) получены достаточные условия сходимости предложенного алгоритма и существования изолированного решения рассматриваемой задачи.

Теорема. Пусть существуют $\nu \in N$, $\rho > 0$, $R_r(t) \geq 0$, $\lambda_r^{(0)}$, $u_r^{(0)}(t) \in \tilde{C}([t_{r-1}, t_r), R^n)$, $r=\overline{1,m+1}$, при которых выполняется следующие условия:

1) функции $f(t,x)$, $J_j(x)$, $j=\overline{1,m}$ соответственно в $G_0(R[t], \rho)$, $S\left(\lambda_{j+1}^{(0)}, \rho\right)$, $j=\overline{1,m}$ имеют равномерно непрерывные производные $f_x\ (t,x)$, $J_{j,x}(x)$ и $\left\|f_x\ (t,x)\right\| \leq L(t)$:

2) матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde{t}}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ обратима и $\left\|\left[\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde{t}}(\lambda,u)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\right\| \leq \gamma_\nu(\tilde{t})$ для всех

$$(\lambda, u) \in S\left(\lambda^{(0)}, \rho\right) \times S\left(u^{(0)}[t], R[t]\rho\right);$$

3) $q_\nu(\tilde{t}) = \gamma_\nu(\tilde{t}) \max_{r=\overline{1,m+1}} \times$

$$\times \left\{\exp\left(\int_{t_{r-1}}^{t_r} L(t)dt\right) - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{i!}\left(\int_{t_{r-1}}^{t_r} L(t)dt\right)^i\right\} < 1;$$

4) $\dfrac{\gamma_\nu(\tilde{t})}{1 - q_\nu(\tilde{t})} \left\|Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(0)}, u^{(0)}\right)\right\| < \rho$;

5) $\exp\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L(\tau)d\tau\right) - 1 \le R_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$,

$r = \overline{1, m+1}$.

Тогда определяемая алгоритмом последовательность пар $\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)$, $k = 0,1,2,\ldots$ содержится в $S\left(\lambda^{(0)},\rho\right) \times S\left(u^{(0)}[t], R[t]\rho\right)$, сходится к $\left(\lambda^*, u^*[t]\right)$ – решению задачи (4)–(6) в $S\left(\lambda^{(0)},\rho\right) \times$ $\times S\left(u^{(0)}[t], R[t]\rho\right)$ и справедливы оценки

$$a)\left\|\lambda^* - \lambda^{(k)}\right\| \le \left[q_\nu(\tilde{t})\right]^k \frac{\gamma_\nu(\tilde{t})}{1-q_\nu(\tilde{t})}\left\|Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(0)}, u^{(0)}\right)\right\|,$$

$$б)\left\|u_r^*(t) - u_r^{(k)}(t)\right\| \le$$

$$\le \left(\exp\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L(\tau)d\tau\right) - 1\right)\left\|\lambda_r^* - \lambda_r^{(k)}\right\|,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1, m+1}.$$

Причем любое решение задачи (4)–(6) в $S\left(\lambda^{(0)},\rho\right) \times S\left(u^{(0)}[t], R[t]\rho\right)$ изолировано.

Доказательство. В силу условий теоремы оператор $Q_{\nu,\tilde{t}}(\lambda, u^{(0)})$ в $S\left(\lambda^{(0)},\rho\right)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 1 из [4]. Выбрав $\alpha \ge \alpha_0 \ge 1$, построим итерационный процесс: $\lambda^{(1,0)} = \lambda^{(0)}$,

$$\lambda^{(1,s+1)} = \lambda^{(1,s)} - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(1,s)}, u^{(0)}\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1} \times$$

$$\times Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(1,s)}, u^{(0)}\right),\ s = 0,1,2,\ldots \qquad (12)$$

По теореме 1 из [4] итерационный процесс (12) сходится к $\lambda^{(1)} \in S\left(\lambda^{(0)},\rho\right)$ – изолированному решению уравнения $Q_{\nu,\tilde{t}}(\lambda, u^{(0)}) = 0$ и

$$\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\| \le \gamma_\nu(\tilde{t})\left\|Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(0)}, u^{(0)}\right)\right\| < \rho. \qquad (13)$$

При наших предположениях задача Коши (4) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$ на $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, m+1}$ имеет единственное решение $u_r^{(1)}(t)$ и для него справедливо неравенство

$$\left\|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\right\| \le \int\limits_{t_{r-1}}^{t} L(\tau)\left[\left\|\lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)}\right\| + \right.$$

$$\left. + \left\|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\right\|\right]d\tau.$$

Используя лемму Гронуолла–Беллмана, имеем

$$\left\|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\right\| \le \left(\exp\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L(\tau)d\tau\right) - 1\right)\left\|\lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)}\right\|,$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r),\ r = \overline{1, m+1}. \qquad (14)$$

Откуда и из (13) получим $u^{(1)}[t] \in S\left(u^{(0)}[t], R[t]\rho\right)$. Из структуры оператора $Q_{\nu,\tilde{t}}(\lambda, u)$ и равенства $Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(1)}, u^{(0)}\right) = 0$ следует, что

$$\gamma_\nu(\tilde{t})\left\|Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(1)}, u^{(1)}\right)\right\| =$$

$$= \gamma_\nu(\tilde{t})\left\|Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(1)}, u^{(1)}\right) - Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(1)}, u^{(0)}\right)\right\| \le$$

$$\le \gamma_\nu(\tilde{t}) \max_{r=\overline{1,m+1}} \times$$

$$\times \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} L(\tau_1) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} L(\tau_\nu)\left\|u_r^{(1)}(\tau_\nu) - u_r^{(0)}(\tau_\nu)\right\| d\tau_\nu \ldots d\tau_1.$$

Подставляя вместо $\left\|u_r^{(1)}(\tau_\nu) - u_r^{(0)}(\tau_\nu)\right\|$ правую часть (14) и вычисляя повторные интегралы, имеем

$$\gamma_\nu(\tilde{t})\left\|Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(1)}, u^{(1)}\right)\right\| \le q_\nu(\tilde{t})\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|. \qquad (15)$$

Если $\lambda \in S\left(\lambda^{(1)}, \rho_1\right)$, где $\rho_1 = \gamma_\nu(\tilde{t})\left\|Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(1)}, u^{(1)}\right)\right\|$, то в силу неравенств 3), 4) теоремы и (13), (15) имеет место оценка

$$\left\|\lambda - \lambda^{(0)}\right\| \le \left\|\lambda - \lambda^{(1)}\right\| + \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\| <$$

$$< \gamma_\nu(\tilde{t})\left\|Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(1)}, u^{(1)}\right)\right\| + \left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\| \le$$

$$\le \left[q_\nu(\tilde{t}) + 1\right]\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\| < \frac{\gamma_\nu(\tilde{t})}{1 - q_\nu(\tilde{t})}\left\|Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(0)}, u^{(0)}\right)\right\| < \rho,$$

т.е. $S\left(\lambda^{(1)}, \rho_1\right) \subset S\left(\lambda^{(0)}, \rho\right)$. Оператор $Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda, u^{(1)}\right)$ в $S\left(\lambda^{(1)}, \rho\right)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 [4]. Поэтому итерационный процесс $\lambda^{(2,0)} = \lambda^{(1)}$,

$$\lambda^{(2,s+1)} = \lambda^{(2,s)} - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(2,s)}, u^{(0)}\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1} Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(2,s)}, u^{(0)}\right),$$

$$s = 0,1,2,\ldots$$

сходится к $\lambda^{(2)} \in S\left(\lambda^{(1)}, \rho_1\right)$ – решению уравнения $Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda, u^{(1)}\right) = 0$ и $\left\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\right\| \le \gamma_\nu(\tilde{t})\left\|Q_{\nu,\tilde{t}}\left(\lambda^{(1)}, u^{(1)}\right)\right\|$.

Отсюда и из (15) вытекает неравенство

$$\left\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}\right\| \le q_\nu(\tilde t)\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|. \qquad (16)$$

Предполагая, что пара $\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)}[t]\right)\in S\left(\lambda^{(0)},\rho\right)\times$ $\times S\left(u^{(0)}[t],R[t]\rho\right)$ определена и установлены оценки

$$\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\| \le q_\nu(\tilde t)\left\|\lambda^{(k-2)}-\lambda^{(k-3)}\right\| \le$$

$$\le \left[q_\nu(\tilde t)\right]^{k-2}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|, \qquad (17)$$

$$\gamma_\nu(\tilde t)\left\|Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)}\right)\right\| \le q_\nu(\tilde t)\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\|, \qquad (18)$$

k-е приближение по параметру $\lambda^{(k)}$ найдем из уравнения $Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda,u^{(k-1)}\right)=0$. Используя (17), (18) и равенство $Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-2)}\right)=0$, аналогично (15) установим справедливость неравенства

$$\gamma_\nu(\tilde t)\left\|Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)}\right)\right\| \le q_\nu(\tilde t)\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\| \le$$

$$\le \left[q_\nu(\tilde t)\right]^{k-1}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|. \qquad (19)$$

Возьмем $\rho_{k-1}=\gamma_\nu(\tilde t)\left\|Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)}\right)\right\|$ и покажем, что $S\left(\lambda^{(k-1)},\rho_{k-1}\right)\in S\left(\lambda^{(0)},\rho\right)$. Действительно, ввиду (17), (18), (19) и 4)

$$\left\|\lambda-\lambda^{(0)}\right\| \le \left\|\lambda-\lambda^{(k-1)}\right\|+\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\|+\ldots+$$

$$+\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\| < \rho_{k-1}+\left[q_\nu(\tilde t)\right]^{k-1}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|+\ldots+$$

$$+\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\| \le \left(\left[q_\nu(\tilde t)\right]^{k-1}+\ldots+1\right)\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\| <$$

$$< \frac{\gamma_\nu(\tilde t)}{1-q_\nu(\tilde t)}\left\|Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}\right)\right\| < \rho.$$

Так как $Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda,u^{(k-1)}\right)$ в $S\left(\lambda^{(k-1)},\rho_{k-1}\right)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 из [4], то существует $\lambda^{(k)}\in S\left(\lambda^{(k-1)},\rho_{k-1}\right)$ – решение уравнения $Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda,u^{(k-1)}\right)=0$ и справедлива оценка

$$\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\| \le q_\nu(\tilde t)\left\|Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)}\right)\right\|. \qquad (20)$$

Решая задачи Коши (4) при $\lambda_r=\lambda_r^{(k)}$, находим функции $u_r^{(k)}(t)$, $t\in\left[t_{r-1},t_r\right)$, $r=\overline{1,m+1}$. Отметим, что если $\rho_k=\gamma_\nu(\tilde t)\left\|Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}\right)\right\|=0$, то $\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)$ – решение задачи (4)–(6). Используя (19), (20) и неравенство Гроноулла–Беллмана, устанавливаем оценки

$$\left\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right\| \le q_\nu(\tilde t)\left\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\right\|, \qquad (21)$$

$$\left\|u_r^{(k)}(t)-u_r^{(k-1)}\right\| \le \left(\exp\left(\int_{t_{r-1}}^{t}L(\tau)d\tau\right)-1\right)\left\|\lambda_r^{(k)}-\lambda_r^{(k-1)}\right\|,$$

$$t\in\left[t_{r-1},t_r\right),\ r=\overline{1,m+1}. \qquad (22)$$

В силу неравенств (21), (22) и $q_\nu(\tilde t)<1$ последовательность пар $\left(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t]\right)$ при $k\to\infty$ сходится к $\left(\lambda^{*},u^{*}[t]\right)$ – решению задачи (4)–(6).

В неравенствах

$$\left\|\lambda^{(k+p)}-\lambda^{(k)}\right\| < \frac{1}{1-q_\nu(\tilde t)}\left[q_\nu(\tilde t)\right]^{k}\gamma_\nu(\tilde t)\left\|Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda^{(0)},u^{(0)}\right)\right\|,$$

$$\left\|u_r^{(k+p)}(t)-u_r^{(k)}(t)\right\| \le \left[\exp\left(\int_{t_{r-1}}^{t}L(\tau)d\tau\right)-1\right]\left\|\lambda_r^{(k+p)}-\lambda_r^{(k)}\right\|,$$

$$t\in\left[t_{r-1},t_r\right),\ r=\overline{1,m+1},$$

переходя к пределу при $p\to\infty$, получаем оценки а) и б).

Покажем изолированность решения. Возьмем число $\varepsilon>0$ такое, что

$$\varepsilon\gamma_\nu(\tilde t)<1,\quad q_\nu(\tilde t)<1-\varepsilon\gamma_\nu(\tilde t). \qquad (23)$$

Из равномерной непрерывности $f_x(t,x)$, $J_j(x)$, $j=\overline{1,m}$ соответственно в $G_0\left(R[t],\rho\right)$, $S\left(\lambda_j^{(0)},\rho\right)$ и структуры матрицы Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde t}(\lambda,u^{(0)})}{\partial\lambda}$ вытекает ее равномерная непрерывность в $S\left(\lambda^{*},\rho\right)\times$ $\times S\left(u^{*}[t],R[t]\rho\right)$. Поэтому существует число $\delta>0$, при котором $\left\|\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde t}(\lambda,u)}{\partial\lambda}-\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde t}(\lambda^{*},u^{*})}{\partial\lambda}\right\|<\varepsilon$ для всех $(\lambda,u)\in S(\lambda^{*},\delta)\times S\left(u^{*}[t],R[t]\delta\right)$.

Заметим, что если $\left(\lambda^{*},u^{*}[t]\right)$ – решение задачи (4)–(6), то $Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda^{*},u^{*}\right)=0$ при любом $\nu\in N$. Пусть $\left(\tilde\lambda,\tilde u[t]\right)\in S\left(u^{*}[t],R[t]\delta\right)$ – другое решение задачи (4)–(6).

Тогда из равенств $Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda^{*},u^{*}\right)=0$, $Q_{\nu,\tilde t}\left(\tilde\lambda,\tilde u\right)=0$ и $\lambda^{*}=\lambda^{*}-\left[\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda^{*},u^{*}\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda^{*},u^{*}\right)$, $\tilde\lambda=$ $=\tilde\lambda-\left[\dfrac{\partial Q_{\nu,\tilde t}\left(\lambda^{*},u^{*}\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}Q_{\nu,\tilde t}\left(\tilde\lambda,\tilde u\right)$ следует оценка

$$\left\|\lambda^* - \tilde{\lambda}\right\| \le \frac{\gamma_\nu(\tilde{h})}{1-\varepsilon\gamma_\nu(\tilde{h})}\left\|Q_{\nu,\tilde{h}}\left(\tilde{\lambda},u^*\right) - Q_{\nu,\tilde{h}}\left(\tilde{\lambda},\tilde{u}\right)\right\| \le \frac{\gamma_\nu(\tilde{h})}{1-\varepsilon\gamma_\nu(\tilde{h})}\times$$

$$\times \max_{r=\overline{1,m+1}}\left\{\int_{t_{r-1}}^{t_r} L(\tau_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} L(\tau_\nu)\left\|u_r^*(\tau_\nu) - \tilde{u}_r(\tau_\nu)\right\| d\tau_\nu \ldots d\tau_1\right\}. \qquad (24)$$

Так как $\left\|u_r^*(t) - \tilde{u}_r(t)\right\| \le \int_{t_{r-1}}^{t} L(\tau)\left(\left\|\lambda_r^* - \tilde{\lambda}_r\right\| + \left\|u_r^*(\tau) - \tilde{u}_r(\tau)\right\|\right)d\tau$, то в силу леммы Гронуолла–Беллмана

$$\left\|u_r^*(t) - \tilde{u}_r(t)\right\| \le \left(\exp\left(\int_{t_{r-1}}^{t} L(\tau)d\tau\right) - 1\right)\left\|\lambda_r^* - \tilde{\lambda}_r\right\|. \qquad (25)$$

Подставляя (25) в правую часть (24), имеем

$$\left\|\lambda^* - \tilde{\lambda}\right\| \le \frac{q_\nu(\tilde{h})}{1-\varepsilon\gamma_\nu(\tilde{h})}\left\|\lambda^* - \tilde{\lambda}\right\|. \qquad (26)$$

Таким образом, в силу неравенств (23), (25), (26) имеют место равенства $\lambda_r^* = \tilde{\lambda}_r$, $u_r^*(t) = \tilde{u}_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, m+1}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища шк., 1987. 282 с.

2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнении. Киев: Наук. думка, 1992. 280 с.

3. *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем.физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50-66.

4. *Джумабаев Д.С.* Итерационные процессы с демпфирующими множителями и их применение // Матем. журнал. Алматы, 2001. Т. 1, № 1. С. 30-40.

Резюме

Импульсті түрткілі дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есеп параметрлеу әдісімен зерттелінеді. қарастырылып отырған есептің шешімін табу алгоритмі тұрғызылды. Ұсынылған алгоритмнің жинақтылығының және жекешеленген шешімнің болуының жеткілікті шарттары алынды.

Summary

The periodical boundary value problem for system of non-linear differential equations with impulse perturbation is investigated by method parameterization. The algorithm of finding of the considering problems solution. The sufficient conditions of convergence of the proposing algorithm and of existence of isolated solution are obtained.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 09.11.05 г.