УДК 517. 956

Т. Ж. ЕЛДЕСБАЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПО КРАЕВЫМ УСЛОВИЯМ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ ДАРБУ

В характеристическом треугольнике решена задача нахождения правой части гиперболического уравнения с характеристическим вырождением типа и порядка.

Пусть Ω – конечная односвязная область плоскости переменных *x, y*, ограниченная отрезком АВ: $0 \le x \le 1$ прямой *y* = 0 и выходящими из точки $C\left(1/2, \left((2m+1)/4\right)^{2/(2m+1)}\right)$ характеристиками АС: $\xi = x - \frac{2}{2m+1} y^{\frac{2m+1}{2}} = 0$, ВС: $\eta = x + \frac{2}{2m+1} \times$ $\times y^{\frac{2m+1}{2}} = 1$ уравнения

$$L(\alpha, \rho)\overline{U} \equiv y\overline{U}_{yy} - y^{2m}\overline{U}_{xx} + \alpha\overline{U}_y + \rho y^{\frac{2m-1}{2}}\overline{U}_x + \\ + \overline{C}(x, y)\overline{U} = \overline{f}(x, y), m > 0, \quad (1)$$

где α, ρ – действительные постоянные.

Введем обозначения: $D(\alpha,\rho)$ – множество действительных функций $\overline{U}(x, y)$ с непрерывной в области Ω второй производной, принадлежащих классу

$$\overline{U}_{|AC} \in C^1(\overline{AC} \setminus A), \overline{U}_{|BC} \in C^1(\overline{BC} \setminus B);$$

$B(\alpha,\rho)$ – принадлежащее $D(\alpha,\rho)$ пространство функций $\overline{U}(x, y), (x, y) \in \Omega$, удовлетворяющих наперед

$$\left(\frac{1}{M_{\text{p}}^2}-\frac{1}{M_S^2}\right) grad\ div\,\vec{u}+\frac{1}{M_S^2}\nabla^2\vec{u}=\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\eta^2}\ . \qquad (3)$$

Здесь $M_P = c/c_P$, $M_S = c/c_s$ – числа Маха; $c_P=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости распространения волн расширения – сжатия и сдвига в среде; $\vec{u}$ – вектор смещения упругой среды; ∇^2 – оператор Лапласа; $\lambda=2\nu\mu/(1-2\nu)$; ν – коэффициент Пуассона, μ – модуль сдвига, ρ – плотность.

Преобразуем уравнение (3), выразив вектор смещения упругой среды через потенциалы Ламе:

$$\vec{u}=grad\varphi_1+rot\vec{\psi}\,. \qquad (4)$$

Потенциал $\vec{\psi}$ можно представить в виде

$$\vec{\psi}=\varphi_2\vec{e}_\eta+rot(\varphi_3\vec{e}_\eta),$$

где $\vec{e}_\eta$ – орт оси η. С учетом этого (4) примет вид

$$\vec{u}=grad\varphi_1+rot(\varphi_2\vec{e}_\eta)+rotrot(\varphi_3\vec{e}_\eta)\,. \qquad (5)$$

Из (3) и (5) следует, что потенциалы φ_j удовлетворяют видоизмененным волновым уравнениям:

$$\nabla^2\varphi_{\text{j}}=M_{\text{j}}^2\frac{\partial^2\varphi_{\text{j}}}{\partial\eta^2},\ j=1,2,3\,. \qquad (6)$$

Здесь $M_1=M_P$, $M_2=M_3=M_S$.

Рассмотрим периодическую задачу, когда скручивающая подвижная нагрузка периодична по η и представима в виде

$$P(\theta,\eta)=P^*(\theta)e^{i\xi\eta},\ P^*(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n e^{in\theta},$$

$$j=r,\theta,\eta;\ i^2=-1. \qquad (7)$$

Потенциалы φ_j также будем искать в виде периодических функций по η:

$$\varphi_j(r,\theta,\eta)=\Phi_j(r,\theta)e^{i\xi\eta}\,. \qquad (8)$$

Подставляя (8) в (6), получаем видоизмененные уравнения Гельмгольца:

$$\nabla_2^2\Phi_{\text{j}}-m_{\text{j}}^2\xi^2\Phi_{\text{j}}=0,\ j=1,2,3\,. \qquad (9)$$

Здесь $m_{\text{j}}^2=1-M_{\text{j}}^2, m_1\equiv m_P, m_2=m_3\equiv m_S,$ ∇_2^2 – двумерный оператор Лапласа.

Предположим, что скорость нагрузки меньше скорости распространения волн сдвига в окружающей полость среде («дозвуковой» случай). В этом случае $M_s<1$ ($m_2=m_3=m_s>0$) и решения уравнений (1.18) можно представить в виде

$$\Phi_j=\Phi_j^{(1)}+\Phi_j^{(2)}, \qquad (10)$$

где

$$\Phi_j^{(1)}=\sum_{\text{n}=-\infty}^{\infty}a_{\text{nj}}K_{\text{n}}(k_{\text{j}}r)e^{\text{in}\theta}, \qquad (10,\text{а})$$

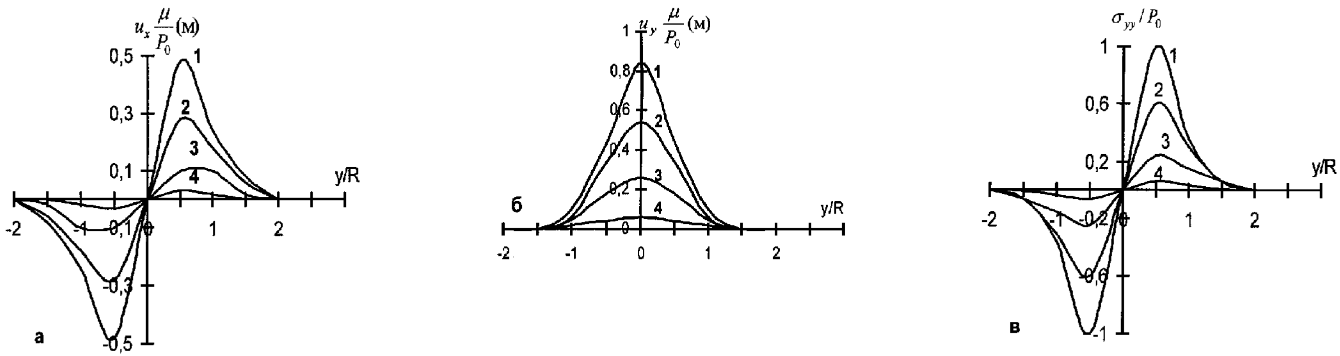
$$\Phi_j^{(2)}=\int_L g_j(\xi,\eta)\exp\left(i y\varsigma+(x-h)\sqrt{\varsigma^2+k_j^2}\right)d\varsigma\,. \qquad (10,\text{б})$$

Здесь $K_n(k_jr)$ – функции Макдональда, $k_j=m_j\xi$; $g_j(\xi,\eta)$, a_{nj} – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Как показано в работе [2], представление потенциалов в форме (10) при использовании (1) и (2) приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_{nj}, для решения которой может быть использован метод последовательных отражений. Определив коэффициенты a_{nj}, можно вычислить компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС) среды. Вместе с тем из [2] следует, что в случае представления второго слагаемого в (10) интегралом Фурье скорость движущейся нагрузки c должна быть меньше скорости волны Релея c_R в упругом полупространстве. В этом случае для вычисления определенных интегралов можно воспользоваться численными методами интегрирования.

2. В качестве примера рассмотрим круговой цилиндрический тоннель с радиусом полости R = 3 м при воздействии движущейся в осевом направлении осесимметричной скручивающей периодической по η нагрузки. Скорость, период и амплитуда нагрузки: c=100 м/с, $T=2\pi$, P_0. Среда – алевролит ($\nu=0,2$, $\mu=2,5\cdot10^3$ МПа, $\rho=2,5\cdot10^3$ кг/м^3, $c_S=1006,4$ м/с). Скорость волны Релея c_R=916,3 м/с.

На рисунке в плоскости $\eta=0$ показаны изменения компонент НДС среды на границе полупространства при разной глубине заложения тоннеля. Из графиков видно, что наибольшие смещения и напряжения возникают при меньшей глубине заложения (кривые 1). Причем максимальное горизонтальное смещение u_y имеет место при y=0, а наибольшие $|u_x|$ и $|\sigma_{yy}|$ – при $y\approx\pm0{,}4R$. При возрастании $|y|$ компоненты НДС границы полупространства быстро затухают и практически равны нулю при $|y|\geq 2R$. С увеличением глубины заложения перемещения и напряжения на границе уменьшаются и при $h/R\geq2$ ими можно пренебречь. В этом случае эффект динамического воздействия подвижной скручивающей нагрузки на дневную поверхность незначителен.



Изменения компонент НДС среды на границе полупространства
при разной глубине заложения тоннеля (1 – h/R = 1,2; 2 – h/R = 1,3; h/R = 1,5; h/R = 2)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пожуев В.И.* Действия подвижной скручивающей нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строительная механика и расчет сооружений. 1984. №6. С. 58-61.

2. *Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинец В.Н.* Влияние свободной поверхности на тоннель мелкого заложения при действии подвижных нагрузок // Известия АН Каз.ССР. Сер. физ.-мат. 1986. №5. С. 75-80.

Резюме

Суперпозиция әдісімен дөңгелек шексіз тоннельде тұрақты Релейге дейінгі жылдамдықпен қозғалатын периодты бұраушы жүктеменің серпімді жартылайжазықтықтың еркін бетіне параллель құраушысы тұралы есеп шешілген. Есеп шешу барысында толқын теңдеулері шешімдері Фурье–Бессель қатарларының суперпозициясы мен Фурье интегралдары түрінде болатын Гельмгольц теңдеулеріне келтірілген. Есептің шешімінің қорытындылары күндізгі беттің түрлі тереңдіктегі тоннелдің аймағының кернеулі-деформацияланған күйіне әсері бар деп есептеуге мүмкіншілік береді.

Summary

The method of the imposition of the decisions is solved problem about moving with constant velocity periodic twisting load in круговом endless subway, forming which parallel free surface springy полупространства. In the course of decisions wave equations were brought to Helmholtz equation, which decision is presented in the manner of Fourier-Bessel rows and Fourier integrals. The results calculation allow to judge about influence of the day surface on tense-deformed condition to vicinities of the subway at miscellaneous to depth of the pawning.

Институт vатематики МОН РК,
г. Алматы

Поступила 24.11.05 г.