И. Р. КАПШАЕВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуются семейства морфизмов векторного слоения, определяемые линейными гамильтоновыми системами дифференциальных уравнений. Доказывается, что указанные семейства морфизмов векторного слоения не являются насыщенными.

1. Приведем сначала используемые здесь понятия и факты из [1–3]. Пусть (E, p, B) – векторное расслоение со слоем R^n и базой B (B – полное метрическое пространство). На (E, p, B) фиксируется некоторая риманова метрика (см. [4]) и рассматривается гомоморфизм группы Z (группы R) в группу изоморфизмов векторного расслоения (E, p, B) (см. [3]). Образ точки t при этом гомоморфизме обозначается через $\left(X^t,\chi^t\right)$. Считается, что $\left(X(m),\chi(m)\right)\underset{\text{def}}{=}\left(X^m,\chi^m\right)$ при всяком $m\in N$.

Определенное таким образом семейство морфизмов $\left(X^m,\chi^m\right)$ $(m\in N)$ удовлетворяет условиям а)–в):

а) (X,χ) – изоморфизм векторного расслоения (E, p, B);

б) при всяком $m\in N$ имеют место равенства

$$X(m)=X^m,\quad \chi(m)=\chi^m;$$

в) существует функция $a(\cdot)\colon\ B\to R^+$ такая, что $a\left(\chi^m b\right)=a(b)$ для всяких $b\in B$, $m\in Z$, и такая, что при всяком $b\in B$ имеет место неравенство

$$\max\left(\left\|X[b]\right\|,\left\|\left[X[b]\right]^{-1}\right\|\right)\le e^{a(b)}. \tag{1}$$

Напомним определение насыщенного семейства морфизмов, данное в [2].

Определение. Семейство морфизмов $\left(X(m),\chi(m)\right)\colon(E,p,B)\to(E,p,B)$ $(m\in N)$, удовлетворяющее условиям а)–в), называется насыщенным, если для всякой точки $b\in B$ такой, что $\chi^m b\ne b$ при всяком $m\ne 0$, для всякого $\bar\varepsilon>0$, для всякого базиса $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ и всяких окрестностей $U(\xi_i)$ точек ξ_i $(i\in\{1,\ldots,n\})$ (в пространстве E) найдется $\delta>0$ такое, что для всякого $\bar t\in N$ и всяких невырожденных линейных операторов

$$Y_m\colon\ p^{-1}\left(\chi^{m-1}b\right)\to p^{-1}\left(\chi^m b\right)$$

($m\in\{1,\ldots,\bar t\}$), удовлетворяющих при всяком $m\in\{1,\ldots,\bar t\}$ неравенству

$$\left\|Y_m\cdot\left(X\left(\chi^{m-1}b\right)^{-1}-I\right)\right\|+\left\|X\left(\chi^{m-1}b\right)\cdot Y_m^{-1}-I\right\|<\delta, \tag{2}$$

найдется точка $b'\in B$ такая, что

$$d(b,b')<\bar\varepsilon, \tag{3}$$

и для всякого $m\in\{0,\ldots,\bar t\}$ найдется изоморфизм слоев $\psi_m\colon p^{-1}\left(\chi^m b'\right)\to p^{-1}\left(\chi^m b\right)$ (как евклидовых пространств), причем выполнены следующие требования:

i) $\psi_0^{-1}\,\xi_i\in U(\xi_i)$ при всяком $i\in\{1,\ldots,n\}$;

ii) при всяком $m\in\{1,\ldots,\bar t\}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}\left(\chi^{m-1}b'\right) & \xrightarrow{X[\chi^{m-1}b']} & p^{-1}\left(\chi^m b'\right) \\ \psi_{m-1}\downarrow & & \downarrow\psi_m \\ p^{-1}\left(\chi^{m-1}b\right) & \xrightarrow[Y_m]{} & p^{-1}\left(\chi^m b\right) \end{array} \tag{4}$$

коммутативна.

2. Рассмотрим семейство морфизмов, построенное в [5].

Пусть M_n – множество всех систем дифференциальных уравнений

$$\dot x=A(t)\,x,\quad x\in R^n \tag{5}$$

таких, что $A(\cdot)\colon\ R\to\operatorname{Hom}\left(R^n,R^n\right)$ – непрерывное отображение, для которого $\sup\limits_{t\in R}\left|A(t)\right|<+\infty$, наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния по формуле $d(A_1,A_2)=$ $=\sup\left|A_1(t)-A_2(t)\right|$ (здесь точка $\dot x=A_i(t)\,x$ пространства обозначена через A_i). Полученное метрическое пространство M_n полное.

Считается, что

$$B\underset{\text{def}}{=}M_n,\ E\underset{\text{def}}{=}B\times R^n,\ p\underset{\text{def}}{=}\mathrm{pr}_1, \tag{6}$$

где pr_1 – проекция произведения $B \times R^n$ на первый сомножитель.

Таким образом, задано тривиальное векторное расслоение (E, p, B).

Пусть для всякого $t \in R$

$$X^t(A,x) = (\chi(t)A, \mathrm{X}(t,0,A)\,x),$$
$$\chi^t A(\,\cdot\,) = A(t + (\,\cdot\,)), \tag{7}$$

где $A \in B$, $x \in R^n$, $\mathrm{X}(\theta,\tau,A)$ – оператор Коши системы $\dot{x} = A(t)\,x$.

Функция $a(\,\cdot\,)$: $B \to R^+$ определяется формулой $a(A) \underset{\mathrm{def}}{=} \sup\limits_{t\in R} |A(t)|$. Положив $(X(m), \chi(m)) \underset{\mathrm{def}}{=} (X^m, \chi^m)$ ($m \in N$), получаем семейство морфизмов $(X(m),\chi(m)):(E,p,B) \to (E,p,B)$, удовлетворяющее условиям а)–в).

В [3] доказывается, что семейство морфизмов (7) является насыщенным.

Исследуем свойство насыщенности для семейств морфизмов, определяемых линейными гамильтоновыми системами.

3. Рассмотрим линейную гамильтонову систему дифференциальных уравнений (см. [6])

$$\dot{x} = J \cdot A(t)x, \quad x \in R^{2n}, \tag{8}$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ – симплектическая единица (E_n – единичная матрица порядка $n \times n$), $A(t)$ – симметрическая матрица порядка $2n \times 2n$, для которой $\sup\limits_{t\in R}\|A(t)\| < +\infty$.

Будем также рассматривать систему дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = J \cdot [A(t) + B_\varepsilon(t)] \cdot x, \quad x \in R^{2n}, \tag{9}$$

где $B_\varepsilon(t)$ – симметрическая матрица, для которой $\sup\limits_{t\in R}\|B_\varepsilon(t)\| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$

Лемма. Пусть дана система (8) и пусть $\mathrm{X}(\Theta,\tau,A)$ – оператор Коши системы (8). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всяких $\bar{t} \in N$ всегда найдутся невырожденные линейные операторы W_m: $R^{2n} \to R^{2n}$ $(m \in \{1,\dots,\bar{t}\})$, удовлетворяющие при всяком $m \in \{1,\dots,\bar{t}\}$ неравенству

$$\left\|W_m[\mathrm{X}(m,m-1,A)]^{-1} - E\right\| +$$
$$+ \left\|\mathrm{X}(m,m-1,A)W_m^{-1} - E\right\| < \delta, \tag{10}$$

для которых не существует непрерывного отображения

$$A_\varepsilon(\cdot):[0,\bar{t}] \to \mathrm{Hom}(R^{2n}, R^{2n}),$$

удовлетворяющего условиям:

1) $\sup\limits_{t\in[0,\bar{t}]}\|A_\varepsilon(t) - A(t)\| < \varepsilon$;

2) $\mathrm{X}(m,m-1,A_\varepsilon) = W_m$ при всяком $m \in \{1,\dots,\bar{t}\}$,

где $\mathrm{X}(m,m-1,A_\varepsilon)$ – оператор Коши системы (9).

Доказательство. Предположим обратное. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всяких $\bar{t} \in N$ и всяких невырожденных линейных операторов W_m: $R^{2n} \to R^{2n}$ $(m \in \{1,\dots,\bar{t}\})$, удовлетворяющих неравенству (10), найдется непрерывное отображение $A_\varepsilon(\cdot):[0,\bar{t}] \to \mathrm{Hom}(R^{2n}, R^{2n})$, удовлетворяющее условиям 1), 2).

Пусть $\mathrm{X}(t,s,A_\varepsilon)$ – оператор Коши системы (9). Тогда для $\forall t,s \in R$ справедливо равенство

$$\dot{\mathrm{X}}(t,s,A_\varepsilon) = J \cdot A_\varepsilon(t) \cdot \mathrm{X}(t,s,A_\varepsilon) =$$
$$= J \cdot [A(t) + B_\varepsilon(t)] \cdot \mathrm{X}(t,s,A_\varepsilon).$$

Умножая последнее равенство справа на $\mathrm{X}^{-1}(t,s,A_\varepsilon)$ и слева на J^{-1}, получаем соотношение

$$B_\varepsilon(t) = J^{-1} \cdot \dot{\mathrm{X}}(t,s,A_\varepsilon) \cdot \mathrm{X}^{-1}(t,s,A_\varepsilon) - A(t), \tag{11}$$

справедливое для $\forall t,s \in R$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = J \cdot \begin{pmatrix} 2e^t & 1 \\ 1 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot x, \quad x \in R^2, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Оператор Коши системы (12) имеет вид:

$$\mathrm{X}(t,s,A) = \begin{pmatrix} 2 - e^{-(t-s)} & e^{-s} - e^{-t} \\ 2\cdot(e^s - e^t) & 2 - e^{t-s} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Положим при всяком $m \in \{1,\dots,\bar{t}\}$ $(\bar{t} \in N)$

$$W_m = \mathrm{X}(m,m-1,A) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_m \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $r_m > 0$ – некоторые действительные числа зависящие от δ и m.

Имеем

$$W_m \cdot [\mathrm{X}(m, m-1, A)]^{-1} - E =$$

$$= r_m \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\cdot(e^m - e^{m-1}) & 2 - e^{-1} \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

$$\mathrm{X}(m, m-1, A)\cdot W_m^{-1} - E =$$

$$= r_m \cdot g(m, m-1)\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\cdot(e^m - e^{m-1}) & 2 - e^{-1} \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

где

$$g(m, m-1) = \frac{1}{-1 - 2r_m - r_m \cdot e^{-1}}.$$

Теперь, если выбрать r_m, удовлетворяющими неравенству $r_m < \dfrac{\delta}{4\cdot(e^m - e^{m-1})}$, то из (15), (16) получаем, что операторы W_m при всяком $m \in \{1, ..., \bar{t}\}$ удовлетворяют неравенству (16).

Тогда в силу предположения для всяких $m \in \{1, ..., \bar{t}\}$

$$\mathrm{X}(m, m-1, A_\varepsilon) = W_m$$

и в силу равенств (11), (14) и (13) имеем

$$B_\varepsilon(m) = J \cdot \dot{W}_m \cdot W_m^{-1} - A(m) = \qquad (17)$$

$$= r_m \cdot g(m, m-1)\cdot \begin{pmatrix} 2\cdot(e^m - e^{m-1}) & 2 - e^{-1} \\ 2\cdot(1 - e^{-1}) & 2\cdot e^{-m} - e^{-m-1} \end{pmatrix}.$$

Однако в силу уравнения (9) матрица $B_\varepsilon(t)$ должна быть симметричной, а этому условию правая часть (17) не удовлетворяет. Полученное противоречие доказывает лемму.

Рассмотрим семейство морфизмов Ξ:

$$(X(m), \chi(m)) : (E, p, B) \to (E, p, B), \qquad (18)$$

$(m \in N)$, векторного расслоения (E, p, B), причем

$$B = M_{2n}, \quad E = B \times R^{2n}, \quad p = pr_1, \qquad (19)$$

$$X^t(A, x) = (\chi^t A, \mathrm{X}(t, 0, A)\cdot x), \qquad (20)$$

$$\chi^t A(\cdot) = A(t + (\cdot)), \qquad (21)$$

где $A \in B, x \in R^{2n}, \mathrm{X}(\Theta, \tau, A)$ – оператор Коши системы (8).

Нетрудно убедиться, что семейство морфизмов (18), (20), (21) удовлетворяет условиям а)–в). Справедлива

Теорема. Семейство морфизмов Ξ векторного расслоения (19) не является насыщенным.

Доказательство теоремы аналогично доказательству в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миллионщиков В.М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1408-1416.
2. *Миллионщиков В.М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. III // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 3. С. 431-468.
3. *Миллионщиков В.М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. V // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 8. С. 1394-1410.
4. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М., 1970. 442 с.
5. *Рахимбердиев М.И.* О бэровском классе показателей Ляпунова // Математические заметки. 1982. Т. 31, № 6. С. 925-931.
6. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. 472 с.
7. *Капшаев И.Р.* Об одной характеристике множества линейных дифференциальных систем с неотрицательными коэффициентами // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2005. №5(243). С. 115-121.

Резюме

Сызықтық дифференциалдық теңдеулеріне парапар дифференциалдық теңдеулер жүйелерімен анықталған мегземелік текшелердің тұрпаттық үйірі зерттелген. Көрсетілген мегземелік текшелердің тұрпаттық үйірі қаныққан болмайтындығы дәлелденген.

Summary

The family of the morphisms of vector stratification, defined by linear hamilton systems of the differential equations is investigated. It is proved, that the specified family of the morphisms of vector stratification is not sated.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 7.10.05 г.