

И. Р. КАПШАЕВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ РАЗДЕЛЕННОСТЬЮ

Рассматриваются линейные системы дифференциальных уравнений с интегральной разделенностью. Исследуется вопрос нахождения критериев принадлежности произвольных линейных систем к системам с интегральной разделенностью.

1. Постановка задачи. Рассматриваются системы вида

$$\dot{x} = A(t) \cdot x, \quad x \in R^n, \quad (1)$$

где $A(\cdot): R \rightarrow \text{Hom}(R^n, R^n)$ – непрерывное отображение, причем $\sup_{t \in R} |A(t)| < +\infty$. Обозначим через

$X(\theta, \tau, A)$ – оператор Коши системы (1).

Определение. Система (1) называется системой с интегральной разделенностью, если она имеет решения $x_1(t), \dots, x_n(t)$, для которых

$$\frac{\|x_{i+1}(t)\| \cdot \|x_i(t)\|}{\|x_{i+1}(s)\| \cdot \|x_i(s)\|} \geq d \cdot e^{a(t-s)}, \quad (t \geq s)$$

для некоторых $d > 0$, $a > 0$ и всех $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Понятие интегральной разделенности появилось впервые в исследованиях Перрона [1] и было развито в работах Р. Э. Винограда [2], Лило [3] и Б. Ф. Былова [4], в работе которого оно получило приведенную выше форму, В. М. Миллионщикова [5], М. И. Рахимбердиева [6] и др.

Благодаря этим исследованиям выяснилось, что системы с интегральной разделенностью обладают рядом важных свойств, а именно (см. [7]) имеют устойчивые характеристические показатели, ляпуновскими преобразованиями приводятся к диагональному виду, всюду плотны в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений и т.д.

В этом смысле изучение свойств систем с интегральной разделенностью и нахождение критериев принадлежности произвольной системы (1) к классу систем с интегральной разделенностью являются важными и интересными задачами. Основные результаты в этом направлении получены в [5–8].

В. М. Миллионщиковым [9] доказана следующая

Лемма 1. Пусть дана система (1). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всяких $\bar{t} \in N$ всегда найдутся невырожденные линейные

операторы $W_m: R^n \rightarrow R^n$ ($m \in \{1, \dots, \bar{t}\}$), удовлетворяющие при всяком $m \in \{1, \dots, \bar{t}\}$ неравенству

$$\|W_m [X(m, m-1, A)]^{-1} - E\| + \|X(m, m-1, A) W_m^{-1} - E\| < \delta,$$

для которых не существует непрерывного отображения

$$A_\varepsilon(\cdot): [0, \bar{t}] \rightarrow \text{Hom}(R^n, R^n),$$

удовлетворяющего условиям:

$$1) \sup_{t \in [0, \bar{t}]} \|A_\varepsilon(t) - A(t)\| < \varepsilon;$$

$$2) X(m, m-1, A_\varepsilon) = W_m \text{ при всяком } m \in \{1, \dots, \bar{t}\},$$

где $X(m, m-1, A_\varepsilon)$ – оператор Коши системы $\dot{x} = A_\varepsilon(t) \cdot x$.

2. Основной результат. Основным результатом настоящей работы является следующая

Лемма 2. Утверждения леммы 1 справедливы и для систем вида (1) с интегральной разделенностью.

Доказательство леммы 2 (из-за громоздкости не приводится) основано на том факте, что множество систем с интегральной разделенностью открыто в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений (см. [7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Perron O. Die Ordnungszahlen der Differentialgleichungssysteme // Math. Z. 1930. V. 32. P. 703-728.
2. Виноград Р.Э. Общий случай устойчивости характеристических показателей и существования ведущих координат // Доклады АН СССР. 1958. Т. 119, № 4. С. 633-635.
3. Lillo J.S. Perturbations of nonlinear systems // Acta Math. 1960. V. 103. P. 123-128.
4. Былов Б.Ф. О приведении системы линейных дифференциальных уравнений к диагональному виду // Мат. сборник. Т. 67(109), № 3. С. 338-344.
5. Миллионщиков В.М. Критерии малого изменения направлений решений линейной системы дифференциальных уравнений при малых возмущениях коэффициентов системы // Математические заметки. 1968. Т. 4, №2. С. 173-180.

6. Рахимбердиев М.И. Об условиях непрерывности старшего показателя линейного расширения динамической системы // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 4. С. 591-600.

7. Миллиончиков В.М. Системы с интегральной разделенностью всюду плотны в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. №7. С. 1167-1170.

8. Рахимбердиев М.И. Об экспоненциальной разделенности с максимальным индексом и равномерной сильной положительности семейства автоморфизмов векторного расслоения // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 2. С. 234-240.

9. Миллиончиков В.М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. V // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, №8. С. 1394-1410.

Резюме

Интегралды бөлінген сызықты дифференциалды теңдеулер анықталады. Интегралды бөлінген жүйелерге құрамында болу еркінше сызықтық жүйелердің белгілер табу мәселесі зерттелген.

Summary

Linear systems of differential equations with integral severalty are considered. The question of define of criterion of belonging of arbitrary linear systems to systems with integral severalty is investigated.

*Институт математики
МОН РК, г. Алматы*

Поступила 11.10.05 г.