531.1:534

А. Б. КЫДЫРБЕКУЛЫ, Л. А. ХАДЖИЕВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается устойчивость движения упругих систем с нелинейными характеристиками геометрической и физической природы. Под устойчивым состоянием упругой системы понимается ее движение в отсутствие колебательного процесса, возникающего в результате ее упругого деформирования. Предлагается методика исследования динамической устойчивости нелинейных систем по Ляпунову. Она строится на задании уравнения возмущенного состояния системы параметрическим уравнением типа Хилла и его решением методом частичной дискретизации А. Н. Тюреходжаева.

Исследуется устойчивость движения упругих систем с нелинейными характеристиками геометрической и физической природы. В результате упругого деформирования системы в ней возникают упругие перемещения колебательной природы. Последние, накладываясь на основное движение системы, приводят к дестабилизации движения.

В работе [1] при исследовании движения упругих систем под ее устойчивым состоянием понимают движение системы в отсутствие колебательного процесса. Другими словами, перемещения системы, возникающие в результате ее упругой деформации, должны со временем стремиться к нулю. Это определение устойчивости движения системы идентично определению устойчивости по Ляпунову.

Одним из методов решения задач динамики упругих систем является уменьшение размерности уравнений движения путем применения к ним известных методов разделения переменных и исследования динамических процессов в нелинейных механических системах с одной степенью свободы типа:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \varepsilon\Phi\left(f,\ \frac{df}{dt}\right) + \omega_0^2 f = F(t)\,. \qquad (1)$$

Устойчивость периодического решения уравнения (1) $f(t)$ зависит от характера поведения его малого отклонения df во времени, т.е. решения уравнения возмущенного состояния системы:

$$\frac{d^2\delta f}{dt^2} + G_1(t)\frac{d\delta f}{dt} + G_2(t)\delta f = 0\,. \qquad (2)$$

Если решение (2) df ограничено при $t \to \infty$, то движение системы считается устойчивым. Если $\delta f \to \infty$ при $t \to \infty$, то движение по определению неустойчиво.

Одним из нежелательных режимов движения системы являются ее резонансные колебания относительно заданного движения. В работе [1] исследуется устойчивость резонансных режимов движения геометрически и физически нелинейных систем (1). Степень нелинейности функции $\Phi(f, f\&)$ относительно обобщенной координаты $f(t)$ соответствует определенному типу упрощений и допущений нелинейной модели.

Здесь рассматриваются механические системы с нелинейностями вида:

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + k_1 \frac{df_i}{dt} + k_2 \left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \alpha_1 f + \alpha_3 f^3 = F \cos \Omega t, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + k_1 \frac{df_i}{dt} + k_2 \left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 = F_0 + F_1 \cos \Omega t. \quad (4)$$

Согласно [2] слагаемое с квадратичной нелинейностью восстанавливающей характеристики соответствует предположению произвольности угла поворота поперечных элементов (физическая нелинейность), а слагаемое с нелинейностью третьего порядка – учету i-х квадратичных членов в тензоре деформации (геометрическая нелинейность) [3].

Исследуя устойчивость основного резонанса и резонанса по высшим частотам, решение (1) задаем в виде гармонического решения

$$f_1(t) = r_1 \cos(\Omega t - \varphi_1) \quad (5)$$

и спектрального ряда с частотами, кратными частоте W (2W, 3W) соответственно в зависимости от типа нелинейности системы.

Решение вопроса устойчивости основного резонанса и резонанса по высшим частотам сводится к анализу решения уравнения возмущенного состояния системы (2).

Вводя новую переменную h, задаваемую как:

$$\delta f = \eta \exp\left(-0{,}5 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial f\&}\right)_0\right), \quad (6)$$

уравнения возмущенного состояния (2) сводятся к параметрическому уравнению типа Хилла [4] относительно переменной h:

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \eta\left[\theta_0 + \theta_{1s} \sin \Omega t + \theta_{1c} \cos \Omega t + \right.$$
$$\left. + \theta_{2s} \sin 2\Omega t + \theta_{2c} \cos 2\Omega t\right] = 0, \quad (7)$$

где θ_0, θ_{1s}, θ_{1c}, θ_{2s}, θ_{2c} есть функции от частот, амплитуд и фаз колебаний W, r_1, j_1 гармонических решений уравнения (1) соответственно.

При исследовании устойчивости резонанса по основной частоте W в нелинейной системе (3) они задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \alpha_1 + 1{,}5\, \alpha_3 r_1^2 - 0{,}25\, k_1^2 - 0{,}5\, k_2^2 r_1^2 \Omega^2, \\
\theta_{1s} &= -k_2 r_1 \Omega^2 \sin \varphi_1 + k_1 k_2 r_1 \Omega \cos \varphi_1, \\
\theta_{1c} &= -k_2 r_1 \Omega^2 \cos \varphi_1 - k_1 k_2 r_1 \Omega \sin \varphi_1, \qquad (8) \\
\theta_{2s} &= 1{,}5\, \alpha_3 r_1^2 \sin 2\varphi_1 + 0{,}5\, k_2^2 r_1^2 \Omega^2 \sin 2\varphi_1, \\
\theta_{2c} &= 1{,}5\, \alpha_3 r_1^2 \cos 2\varphi_1 + 0{,}5\, k_2^2 r_1^2 \Omega^2 \cos 2\varphi_1.
\end{aligned}$$

Для нелинейной системы (4) θ_0, θ_{1s}, θ_{1c}, θ_{2s}, θ_{2c} имеют вид:

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \alpha_1 + 2\, \alpha_2 r_0 - 0{,}25\, k_1^2 - 0{,}5\, k_2^2 r_1^2 \Omega^2, \\
\theta_{1s} &= (2\, \alpha_2 r_1 + k_2 r_1 \Omega^2) \sin \varphi_1 + k_1 k_2 r_1 \Omega \cos \varphi_1, \\
\theta_{1c} &= (2\, \alpha_2 r_1 + k_2 r_1 \Omega^2) \cos \varphi_1 - k_1 k_2 r_1 \Omega \sin \varphi_1, \qquad (9) \\
\theta_{2s} &= 0{,}5\, k_2^2 r_1^2 \Omega^2 \sin 2\varphi_1, \\
\theta_{2c} &= 0{,}5\, k_2^2 r_1^2 \Omega^2 \cos 2\varphi_1.
\end{aligned}$$

Следуя методике работы [4], основанной на применении к решению уравнения типа Хилла (7) теории Флоке, авторы работы [1, 5], строя характеристический определитель, находят границы областей неустойчивости резонансных колебаний.

Соотношения, задающие границы областей неустойчивости, содержат в себе геометрические и физические параметры упругой системы, которые нашли свое отражение в коэффициентах уравнения (1). Подбор соответствующих геометрических и физических параметров упругой системы путем их варьирования позволит отстраивать рабочие режимы системы от нежелательных резонансных режимов движения.

Возможны другие подходы решения и анализа уравнений возмущенного состояния системы. Здесь в отличие от упомянутых ранее работ исследуется вопрос устойчивости движения системы (1), основанный на применении к решению уравнения типа Хилла (7) метода частичной дискретизации А. Н. Тюреходжаева [6]. Данный метод позволяет получить аналитическое решение уравнения типа Хилла, характеризующее поведение малого возмущения df во времени t.

Согласно методу частичной дискретизации А. Н. Тюреходжаева [6] второе слагаемое уравнения (7) дискретизируется в классе обобщенных функций:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(t_k+t_{k+1})[(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_k+\theta_{1c}\cos\Omega t_k+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_k+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_k)\cdot\eta(t_k)\delta(t-t_k)-$$

$$-(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_{k+1}+\theta_{1c}\cos\Omega t_{k+1}+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_{k+1}+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_{k+1})\cdot\eta(t_{k+1})\delta(t-t_{k+1})]=0, \qquad (10)$$

где $h(t_k)$ – дискретное представление функции $h(t)$ для значения аргумента $t = t_k$; $k=\overline{1,n}$ – число разбиений аргумента t; $\delta(t-t_k)$ – дельта функция Дирака.

Решение уравнения (10) не представляет трудности. Задавая начальные условия:

при $t = 0$ $\eta(0)=\eta_0$; $\dot\eta(0)=\dot\eta_0$,

решение (10) имеет вид:

$$\eta(t)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(t_k+t_{k+1})[(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_k+\theta_{1c}\cos\Omega t_k+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_k+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_k)\cdot\eta(t_k)H(t-t_k)-$$

$$-(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_{k+1}+\theta_{1c}\cos\Omega t_{k+1}+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_{k+1}+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_{k+1})\cdot\eta(t_{k+1})H(t-t_{k+1})]+\dot\eta_0 t+\eta_0, \qquad (11)$$

где $H(t-t_k)$ – единичная функция Хевисайда.

Задавая дискретно t, получаем реккурентную формулу расчета неизвестной $h(t)$ на k-м шаге разбиения аргумента t:

$$\eta(t_k)=\frac{-(t_1+t_2)(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_1+\theta_{1c}\cos\Omega t_1+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_1+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_1)\eta(t_1)\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}-t_1\right)}{1+\frac{1}{2}(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}-t_{k-1})(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_k+\theta_{1c}\cos\Omega t_k+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_k+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_k)}-$$

$$-\frac{\sum_{j=2}^{k-1}(t_{j+1}-t_{j-1})(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_1+\theta_{1c}\cos\Omega t_j+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_j+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_{j1})\eta(t_j)\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}-t_j\right)}{1+\frac{1}{2}(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}-t_{k-1})(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_k+\theta_{1c}\cos\Omega t_k+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_k+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_k)}+ \qquad (12)$$

$$+\frac{\dot\eta_0\frac{t_k+t_{r+1}}{2}+\eta_0}{1+\frac{1}{2}(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}-t_{k-1})(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_k+\theta_{1c}\cos\Omega t_k+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_k+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_k)}.$$

Анализируя характер поведения $h(t)$, можно судить об устойчивости исследуемого состояния. Уменьшение величины $h(t)$ со временем t (затухающий процесс) говорит о $\delta f\rightarrow 0$, т.е. об устойчивости исследуемого состояния. Если же колебательный процесс нарастающий, то состояние неустойчивое.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хаджиева Л.А., Кыдырбекулы А.Б.* Об устойчивости движения упругих звеньев плоских МВК // Вестник КазГУ. Сер. мат., мех., инф. 1996. №4. С. 191-194.

2. *Амандосов А.А., Алмухамбетов С.С., Молдакулов Н.З.* Колебания гибких тел при произвольном повороте поперечных элементов // Вестник АН КазССР.1987. №6. С. 60-68.

3. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. 211 с.

4. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 423 с.

5. *Кыдырбекулы А.Б., Хаджиева Л.А.* О колебаниях и устойчивости упругих элементов машин с нелинейными характеристиками и законом сопротивления // Труды Межд. сим-позиума, посв. 100-летию К. И. Саптаева. Алматы, 1999. Ч. II. С. 356-359.

6. *Тюреходжаев А.Н.* Некоторые проблемы современной инженерной практики // Матер. межд. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения». Алматы, 2005. Т. 1. С. 11-28.

Резюме

Геометриялық және физикалық сипаттарының табиғаты сызықты емес серпімді жүйелер қозғалысының орнықтылығы қарастырылады. Серпімді жүйенің орнықты күйі деп оның серпімді деформациясынан пайда болатын тербелісті процестер болмағандағы жүйе қозғалысының орнықтылығын ұғамыз. Сызықты емес жүйелердің динамикалық орнықтылығын Ляпуновша зерттеу әдістемесі ұсынылады. Ол ұйтқыған жүйенің Хилл типіндегі параметрлік теңдеуін беріп, оны А. Н. Төреходжаевтің ішінара дискреттеу әдісімен шығару арқылы жүзеге асады.

Summary

Stability of movement of elastic systems with nonlinear characteristics of a geometrical and physical nature is considered. The stability condition of elastic system is understood as its movement in absence of the oscillatory process arising as a result of her elastic deformation. The technique of research of dynamic stability of nonlinear systems on Lyapunov is offered. It is building on the task of the equation of the indignant condition of system the parametrical equation of type Hill and its decision by method of partial digitization of A. N. Tjurehodzhaeva.

Казахский национальный университет
им. аль-Фараби, г. Алматы

Поступила 16.09.05 г.