УДК 517.977.55

З. Н. МУРЗАБЕКОВ

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача оптимального управления с закрепленными концами траекторий. Получен алгоритм управления для одного класса нелинейных систем с ограничениями на управления.

1. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad t_0 \le t \le T, \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = 0, \tag{2}$$

$$x(t) \in G(t), \quad u(t) \in U(t), \quad t_0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $x = x(t)$ – вектор фазовых координат управляемого объекта размерности $n \times 1$; $u = u(t)$ – вектор управления, определяющий ход процесса размерности $m \times 1$; $f(x,u,t)$ – векторная функция размерности $n \times 1$.

Будем предполагать, что параметры управления $u(t)$ в каждый момент t принадлежат выпуклому замкнутому множеству $U(t)$, которое является подмножеством m-мерного евклидова пространства R_m. Векторная функция $f(x,u,t)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными по $x \in G(t)$ и $u \in U(t)$ и такая, что $f(t, 0, 0) = 0$.

Пусть задан функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(x,u,t)dt, \tag{4}$$

где функция $f_0(x,u,t)$ определена и непрерывна вместе с частными производными по (x,u) при $(x,u,t) \in G(t) \times U(t) \times [t_0,T]$.

Задача. Разработать эффективный метод построения законов управления по принципу обратной связи $u = u(x,t)$ для управляемых систем, который переводит систему (1) из исходного начального состояния $x(t_0) = x_0$ в состояние $x(T) = 0$ и минимизирует заданный функционал (4).

Обозначим через $\Delta(x,t)$ множество всех управлений, удовлетворяющих условию $u(t) \in U(t)$, $t \in [t_0,T]$, и соответствующих траекторий $x(t,u)$ системы (1), определенных на отрезке $t_0 \le t \le T$, т.е. множество

$$\Delta(x,t) = \{(x,u) : u(t) \in U(t),$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), \ x(t) \in G(t), \ t_0 \le t \le T\}. \tag{5}$$

Значения всевозможных функций $x(t)$ образуют некоторое множество, которое обозначим через $X^{\Delta}(t)$. Будем предполагать, что эти множества фактически достижимых значений $x(t)$ в множестве $\Delta(x,t)$ не шире, чем априорно заданное множество $G(t)$: $X^{\Delta}(t) \subseteq G(t)$.

Определение 1. Состояние $x(T) = 0$ будем называть достижимым из исходного состояния $x(t_0) = x_0$ по отношению к множеству допустимых управлений $U(t)$, если существует управление $u^{\Delta}(t) \in \Delta(x,t)$ такое, что $x^{\Delta}(t) \in \Delta(x,t)$ и в момент времени $t = T$, $x^{\Delta}(T) = 0$.

Определение 2. Систему (1) будем называть управляемой в момент времени $t = t_0$, если из любого начального состояния $x(t_0) = x_0$ ее можно перевести в нулевое состояние $x(T) = 0$ за конечный промежуток времени, выбирая надлежащим образом закон изменения управляющих сил $u = u(x,t)$.

Предположим, что система (1) управляема, а множество $\Delta(x,t)$ не пусто.

Рассмотрим вспомогательную задачу: минимизировать функционал

$$J^t(x,u) = \int_{t}^{T} f_0(x,u,\tau)d\tau \tag{6}$$

при условиях

$$\dot{x} = f(x(\tau),u(\tau),\tau), \ x(t) = x, \ \tau \in [t,T], \tag{7}$$

$$u(\tau) \in U, \ \tau \in [t,T], \tag{8}$$

где точка x и момент t, $t_0 \le t \le T$ фиксированы.

Прибавим к выражению для функционала (6) систему дифференциальных уравнений (7) с множителем Лагранжа специального вида $\lambda = \lambda_0(x,t) + q(t)$. В результате получим вспомогательный функционал

$$J^t(x,u,\lambda) = \tag{9}$$

$$= \int_t^T [f_0(x,u,\tau) + (\lambda_0(x,\tau) + q(\tau))^* (f(x,u,\tau) - \dot{x}(\tau)]d\tau.$$

Введем в рассмотрение следующие конструкции:

$$q(\tau) + \lambda_0(x,\tau) = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$R(x,u,\tau) = f_0(x,u,\tau) + (\frac{\partial v}{\partial x})^* f(x,u,\tau) + \frac{\partial v}{\partial \tau}. \quad (10)$$

Здесь $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ означают частные производные функции $v = v(x,t)$.

Лемма. Если пара $(x(t),u(t)) \in \Delta(x,t)$ и функция $v(x(t),t)$ переменной t непрерывна и дифференцируема по t на отрезке $[t_0,T]$, а также выполняется предельное соотношение $\lim v(x,t) = 0$ *при* $t \to T$, то справедливо следующее представление функционала (9) при $u = u(x(t),t)$:

$$J^t = J^t(x(t),u(t)) = \int_t^T R(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + v(x(t),t). (11)$$

Пусть существует оптимальная пара $(x^\Delta(t),u^\Delta(t)) \in \Delta(x,t)$ и найдено минимальное значение

$$R_{\min}(t) = \inf_{x \in G(t)} \inf_{u \in U(t)} R(x,u,t). \quad (12)$$

Теорема. Для оптимальности пары $(x^\Delta(t)$, $u^\Delta(t)) \in \Delta(x,t)$ достаточно существования функции $v(x,t)$ такой, что формула (11) верна для любой допустимой пары $(x(t),u(t)) \in \Delta(x,t)$ и выполняются следующие условия:

1) существует минимальное значение в задаче (12):

$$R(x^\Delta(t),u^\Delta(t),t,) = R_{\min}(t), \quad t \in [t_0,T];$$

2) $v(x,t)$ – положительно определенная функция, допускающая бесконечно малый высший предел;

3) полная производная по времени t от функций $v(x,t)$, полученная в силу уравнения (1), удовлетворяет неравенству:

$$\dot{v}(x,t) + f_0(x^*(t),u^*(t),t) \le 0; \quad (13)$$

4) выполняется предельное соотношение $\lim v(x,t) = 0$ *при* $t \to T$, где $R_{\min}(t)$ определяется согласно (12), а функция $f_0(x,u,t)$ является положительно определенной.

Результаты доказательств леммы и теоремы содержатся в работе [3].

Задача отыскания минимального значения функции

$$R(x,u,t) = f_0(x,u,t) + (\frac{\partial v}{\partial x})^* f(x,u,t) + \frac{\partial v}{\partial t},$$

определенной в области $U(t)$ евклидова пространства E_m, производится при предположении, что функция $R(x,u,t)$ определена и непрерывна вместе с частными производными по (x,u) при $(x,u,t) \in$ $\in G(t) \times U(t) \times [t_0,T]$ и что множество $U(t)$ из E_m компактно. Установлено, что локальный минимум может иметь место только при следующих условиях [1, 2]:

1) в тех внутренних точках, где производная функции $R(x,u,t)$ обращается в нуль;

2) в точках границы множества $U(t)$;

3) в точках, в которых производная функции $R(x,u,t)$ не существует.

Из условия минимума по $u(t) \in U(t)$ находится управление $u^\Delta(t)$, а из условия минимума по $x(u^\Delta(t),t)$ определяются параметры функции $v(x,t)$ при конкретизации этой функции с учетом специфики задачи и множителей Лагранжа специального вида $\lambda = \lambda_0(x,t) + q(t)$.

При практическом определении $(x^\Delta, u^\Delta) \in$ $\in \Delta(x,t)$ с использованием множеств $G(t)$, $U(t)$ в (12) нужно взять более широкие множества E_n и E_m, т.е. необходимо найти управление для следующей задачи:

$$R_{\min}(t) = \inf_{x \in E_n} \inf_{u \in E_m} R(x,u,t). \quad (14)$$

Пусть $\bar{u}(t) = u(x,t)$ – решение задачи (14) при $t \in [t_0,T]$, тогда определяем управление $u^\Delta(t)$ следующим образом:

$$u^\Delta(t) = \bar{u}(t) = u(x,t), \text{ если } \bar{u}(t) \in U(t);$$

$$u^\Delta(t) = \partial u(t), \text{ если } \bar{u}(t) \notin U(t), \quad (15)$$

где $\partial u(t)$ – значения управления на границе множества $U(t)$.

Обозначим через $\bar{\varphi}(t)$ функцию, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\bar{\varphi}(t) = 0, \text{ если } \bar{u}(t) \in U(t);$$

$$\bar{\varphi}(t) = \partial u(t) - u(x,t), \text{ если } \bar{u}(t) = u(x,t) \notin U(t), \quad (16)$$

тогда получим оптимальное управление $u^\Delta(t) =$ $= \bar{u}(t) + \bar{\varphi}(t)$ и оптимальный закон движения системы (1) в следующем виде:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \bar{u}(t) + \bar{\varphi}(t), t),\ x(t_0) = x_0,\ t \in [t_0, T], \quad (17)$$

где управление $\bar{u}(t) = u(x,t)$, а функция $\bar{\varphi}(t)$ определяется из (16).

Обозначим через $U(x,t)$ выпуклое компактное множество из E_m, содержащее оптимальное управление $\bar{u}(t) = u(x,t)$, т.е. $\bar{u}(t) \in U(x,t)$. Разрешимость уравнения (17), при котором система из начального положения $x(t_0) = x_0$ достигает состояния $x(T) = 0$, тесно связана со следующими утверждениями. Требуется проверить, какой из перечисленных случаев имеет место в момент времени $t \in [t_0, T]$:

1) $U(x,t) \subseteq U(t)$ (область оптимальных управлений лежит целиком в заданном целевом множестве $U(t)$);

2) $U(x,t) \cap U(t) \neq \varnothing$ (часть области оптимальных управлений лежит в заданном целевом множестве $U(t)$);

3) $U(x,t) \cap U(t) = \varnothing$ (область оптимальных управлений лежит целиком вне заданного целевого множества $U(t)$).

Достижимость состояния $x(T) = 0$ можно сформулировать при помощи функции $\bar{\varphi}(t)$ следующим образом:

1. Если $\bar{\varphi}(t)$=0 для любого $t \in [t_0, T]$, то найденное управление $\bar{u}(t) = u(x,t)$ будет решением задачи, т.е. $u^{\Delta}(t) = \bar{u}(t)$.

2. Если $\bar{\varphi}(t) \neq 0$ для любого $t \in [t_0, T]$, то не существует управления во множестве $U(t)$ для разрешения поставленной задачи.

3. Если $\bar{\varphi}(t_0) \neq 0$ и существует некоторый момент времени $t_0 < t_1 < T$, для которого $\bar{\varphi}(t_1) = 0$, то управление $u^{\Delta}(t)$ вида (15) будет решением задачи.

Следует отметить, что если исходная система управляема, то существует управление $\bar{u}(t) = u(x,t)$. Если существуют управления во множестве $U(t)$ для разрешения задачи с бесконечным временем управления, то представляет интерес исследование достижимости состояния системы $x(T) = 0$ на конечном интервале времени $t \in [t_0, T]$.

2. Синтез нелинейных систем автоматичес-кого управления. Рассмотрим систему автоматического управления, которая описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu + d\varphi(\sigma),\ t \in [0, T],$$

$$\sigma = c^* x,\ x(0) = x_0,\ x(T) = 0, \quad (18)$$

$$u(t) \in U(t) = \quad (19)$$

$$= \{u(\cdot) \in L_2(I, E_m) \mid \alpha(t) \le u(t) \le \beta(t), t \in I = [0, T]\},$$

где $x = x(t)$ – вектор состояния объекта управления размерности $n \times 1$; $u = u(x,t)$ – вектор управляющих воздействий размерности $m \times 1$; A, B – постоянные матрицы размерности $n \times n$, $n \times m$ соответственно; d, c – постоянные вектора размерности $n \times 1$.

Нелинейная характеристика $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию

$$0 \le \varphi(\sigma)\sigma \le \mu\sigma^2, \qquad \mu > 0,\ \varphi(0) = 0. \quad (20)$$

Задача. Найти управление $u(x,t)$, которое переводит систему (18) из исходного начального состояния $x(0) = x_0$ в желаемое конечное состояние $x(T) = 0$ за заданное время T и минимизирует квадратичный функционал

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T [x^* Q x + u^* R u] dt, \quad (21)$$

где постоянные матрицы Q, R симметричны и положительно определены.

Для решения задачи (18)–(21) образуем вспомогательный критерий качества J^t прибавлением к (21) системы дифференциальных уравнений (18) с множителями Лагранжа специального вида $\lambda = Kx + q + \theta c\varphi$:

$$J^t = \int_t^T [\frac{1}{2}x^* Q x + \frac{1}{2}u^* R u +$$

$$+ (Kx + q + \theta c\varphi)^* (Ax + Bu + d\varphi - \dot{x})] d\tau, \quad (22)$$

где $q = q(t)$ – вектор размерности $n \times 1$; K – симметричная положительно определенная матрица размерности $n \times n$, θ – скалярная величина.

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$v(x,t) = \frac{1}{2}x^* K x + x^* q + \theta \int_0^{\sigma} \varphi(\tau) d\tau,$$

$$M(x,u,t) = \frac{1}{2}x^* Q x + \frac{1}{2}u^* R u +$$

$$+ (Kx + q + \theta c\varphi)^* (Ax + Bu + d\varphi) + \frac{1}{2}x^* \dot{K} x + x^* \dot{q}. \quad (23)$$

Тогда справедливо следующее представление функционала (22):

$$J^t = v(x,t) + \int_t^T M(x,u,\tau)d\tau \,. \qquad (24)$$

То обстоятельство, что функционал (24) должен быть минимальным вдоль оптимальной траектории, устанавливается при помощи соотношения (23), которое должно выполняться для всех допустимых управлений $u(t) \in U(t),\ t \in [t_0, T]$. Таким образом, имеем

$$M_{\min}(t) = M(x^\Delta, u^\Delta, t) \le M(x,u,t),$$
$$u^\Delta(t) \in U(t),\ u(t) \in U(t),\ t \in [t_0, T]. \qquad (25)$$

Обозначим компоненты вектора $\overline{u}(t)$, определяемого соотношением

$$\overline{u}(t) = -R^{-1}B^*[Kx^\Delta(t) + q(t) + \theta c\varphi(\sigma)]. \qquad (26)$$

Тогда соотношение (28) можно записать в виде

$$M(x^\Delta(t), u^\Delta(t), t) = \frac{1}{2}(x^\Delta(t))^*[Q + \dot{K}]x^\Delta(t) +$$
$$+\frac{1}{2}(u^\Delta(t))^* Ru^\Delta(t) + (Kx^\Delta(t) + q(t) +$$
$$+\theta c\varphi(\sigma))^*(Ax^\Delta(t) + Bu^\Delta(t) + d\varphi(\sigma)) + x(t)^*\dot{q}(t) =$$
$$= \frac{1}{2}(x^\Delta(t))^*[Q + \dot{K}]x^\Delta(t) + \frac{1}{2}(u^\Delta(t) - \overline{u}(t))^* R(u^\Delta(t) -$$
$$-\overline{u}(t) + (Kx^\Delta(t) + q(t) + \qquad (27)$$
$$+\theta c\varphi(\sigma))^*(Ax^\Delta(t) + d\varphi(\sigma)) + x(t)^*\dot{q}(t) - \frac{1}{2}\overline{u}(t)^* R\overline{u}(t).$$

Из полученного выражения следует, что минимальное значение (27) достигается, если управление $u^\Delta(t) \in U(t),\ t \in [t_0, T]$ определяется следующим образом:

$$u^\Delta(t) = \beta(t),\ t \in [t_0, T], \text{ если } \overline{u}(t) > \beta(t);$$
$$u^\Delta(t) = \overline{u}(t),\ t \in [t_0, T], \text{ если } \alpha(t) \le \overline{u}(t) \le \beta(t); \quad (28)$$
$$u^\Delta(t) = \alpha(t),\ t \in [t_0, T], \text{ если } \overline{u}(t) < \alpha(t).$$

Следует отметить, что оптимальное управление $u^\Delta(t) \in U(t),\ t \in [t_0, T]$ однозначно выражается через состояние $x(t)$ и ограничения $\alpha(t), \beta(t)$. В данном случае имеем вполне определенное управление $u^\Delta(t) \in U(t),\ t \in [t_0, T]$, которое выражается в виде (28) и (26). Поэтому вырожденных случаев для поставленной задачи (18)–(21) не возникает при условии, что матрица R положительно определена. Возникает вопрос: обеспечивает ли управление $u^\Delta(t) \in U(t),\ t \in [t_0, T]$ достижение состояния $x(T) = 0$. Достижимость состояния $x(T) = 0$ можно сформулировать при помощи функции $\overline{\varphi}(t)$, которая удовлетворяет условиям:

$$\overline{\varphi}(t) = 0, \text{ если } \overline{u}(t) \in U(t);$$
$$\overline{\varphi}(t) = \beta(t) - \overline{u}(t), \text{ если } \overline{u}(t) > \beta(t), \qquad (29)$$
$$\overline{\varphi}(t) = \alpha(t) - \overline{u}(t), \text{ если } \overline{u}(t) < \alpha(t).$$

Дифференциальное уравнение, определяющее оптимальный закон движения системы (18) с управлением $u^\Delta(t) = \overline{u}(t) + \overline{\varphi}(t)$, будет следующим:

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^*K)x - BR^{-1}B^*q +$$
$$+[d - \theta BR^{-1}B^*c]\varphi(\sigma) + B\overline{\varphi}(t),\ \ x(t_0) = x_0. \qquad (30)$$

Заметим, что полученное управление можно реализовать на практике, поскольку матрица усиления $R^{-1}B^*K$ в этом регуляторе постоянна, а функция $\overline{\varphi}(t)$ ограничена. Матрица $K = K^* > 0$, вектор $q(t)$ и скалярная величина θ определяются из выражения (27) аналогично подходу работы [3] . Начальное условие $q(t_0)$ определяется таким образом, чтобы система (30) из исходного состояния $x(0) = x_0$ достигала состояние $x(T) = 0$ за заданное время T.

Минимальное значение функционала (24) приводим к виду

$$J^t = v(x,t) + \int_t^T M_{\min}(\tau)d\tau \,.$$

Следует отметить, что оптимальное управление $u^\Delta(t) \in U(t),\ t \in [t_0, T]$ можно однозначно выразить через состояние $x(t)$ и функцию $\overline{\varphi}(t)$, если ограничения заданы не только в виде (19), но и в виде других множеств.

Пусть компоненты вектора $\overline{u}(t)$ определяются соотношением

$$\overline{u}(t) = -R^{-1}B^*[Kx^\Delta(t) + q(t) + \theta c\varphi(\sigma)], \qquad (31)$$

тогда оптимальное управление имеет вид $u^\Delta(t) = \overline{u}(t) + \overline{\varphi}(t)$, где функция $\overline{\varphi}(t)$ удовлетворяет следующим условиям, если заданы ограничения на управления в виде множеств:

1) $u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, E_m) \mid |u_i(t)| \le r,$

$$i = 1,2,...m,\ r > 0,\ t \in I = [0,T]\} \text{ – гиперкуб;}$$

$$\overline{\varphi}_i(t) = 0, \text{ если } |\overline{u}_i(t)| \le r,\ i = 1,2,...m;$$

$$\overline{\varphi}_i(t) = r - \overline{u}_i(t), \text{ если } \overline{u}_i(t) > r;$$

$$\overline{\varphi}_i(t) = -r - \overline{u}_i(t), \text{ если } \overline{u}_i(t) < -r; \qquad (32)$$

$$2)\ u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, E_m) \mid \sum_{i=1}^{m} u_i^{\,2}(t) \le r^2,$$

$$t \in I = [0,T]\} \text{ – гипершар;}$$

$$\overline{\varphi}_i(t) = 0, \text{ если } \sum_{i=1}^{m} \overline{u}_i^{\,2} = \beta^2 \le r^2,\ i = 1,2,...m;$$

$$\overline{\varphi}_i(t) = (\frac{r}{\beta} - 1)\overline{u}_i(t),\ i = 1,2,...m, \text{ если } \beta > r > 0; \quad (33)$$

$$3)\ u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, E_m) \mid \sum_{i=1}^{m} c_i^{\,2} u_i(t)^2 \le 1,$$

$$t \in I = [0,T]\} \text{ – гиперэллипс;}$$

$$\overline{\varphi}_i(t) = 0, \text{ если } \sum_{i=1}^{m} c_i^{\,2} \overline{u}_i^{\,2} = \beta^2 \le 1;$$

$$\overline{\varphi}_i(t) = (\frac{1}{\beta} - 1)\overline{u}_i(t),\ i = 1,2,...m, \text{ если } \beta > 1; \quad (34)$$

$$4)\ u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, E_m) \mid |\sum_{i=1}^{m} c_i u_i(t)| \le r,$$

$$r > 0,\ t \in I = [0,T]\}.$$

$$\overline{\varphi}_i(t) = 0, \text{ если } |\sum_{i=1}^{m} c_i \overline{u}_i| = \beta \le r;$$

$$\overline{\varphi}_i(t) = (\frac{r}{\beta} - 1)\overline{u}_i(t),\ i = 1,2,...m, \text{ если } \beta > r. \quad (35)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.

2. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. Введение в теорию и приложения. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.

3. *Мурзабеков З.Н.* Синтез управляемых динамических систем. Алматы: қазақ университеті, 2004. 346 с.

Резюме

Траекторияларының шектері бекітілген тиімді басқару тапсырмалары қарастырылады. Басқаруға шектеу қойылған сызықты емес жүйелердің бір класына арналған басқару алгоритмі алынды.

Summary

The main issue is the problem of optimal control with fixed ends of the trajectory. Algorithm of control of one class of nonlinear systems with limitations of control is obtained.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Поступила 5.05.05 г.