М. О. ОРЫНБАСАРОВ, А. А. САМБЕТОВА

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В статье методом параметрикс построены линейно независимые решения бипараболического уравнения. При помощи их построены специальные ядра и специальные поверхностные потенциалы. Доказаны основные свойства этих потенциалов. При помощи поверхностных потенциалов краевая задача сведена к системе интегральных уравнений с ядрами со слабыми особенностями.

1. Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу для следующего бипараболического уравнения:

$$\delta^2 = F(P,t) \tag{1}$$

в цилиндрической области $\Omega_t : \{(x,y,t) : (x,y) \in \in \Omega,\ t>0\}$ с боковой границей S_t с начальными условиями

$$u(P,t)\big|_{t=0} = f_0(P), \tag{2}$$

$$\delta u(P,t)\big|_{t=0} = f_1(P) \tag{3}$$

и граничными условиями:

$$u(P,t)\big|_S = \varphi_0(P_0,t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(P,t)\big|_S = \varphi_1(P_0,t), \tag{5}$$

где $\delta \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a(P,t)\Delta - B(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial t} - a(P,t)\Delta - - b_1(P,t)\frac{\partial}{\partial x} - b_2(P,t)\frac{\partial}{\partial y} - b_0(P,t)$ – параболический оператор, Δ – оператор Лапласа. Точки $P(x,y) \in \Omega$, $P_0(x,y) \in S$, n-нормаль к контуру S, заданные функции $F(P,t) \in C^{\alpha,0}_{P,t}(\Omega_t)$, $f_0(P) \in C^1_P(\Omega_t)$, $f_1(P) \in C(\Omega_t)$, $\varphi_i(P_0,t) \in C(S_t)$ $i = 0, 1$ удовлетворяют условиям согласования $f_0(P_0) = \varphi_0(P_0,0)$, $\frac{\partial}{\partial n} f_0(P_0) = \varphi_1(P_0,0)$, коэффициент $a(P,t) \in C^{2,1}_{P,t}$, $b_i(P,t) \in C^{2,1}_{P,t}$, $i = 0,1,2$.

Линейные независимые решения уравнения $\delta^2 u = 0$ построим методом параметрикс, т.е. в виде

$$G_i(P,t;Q,\tau) = G_i^{(Q,\tau)}(P,Q,t-\tau) + G_{i1}(P,t;Q,\tau) =$$

$$(t-\tau)^i \frac{1}{(2\sqrt{\pi a(Q,\tau)(t-\tau)})^2} e^{-\frac{r^2}{4a(Q,\tau)^2(t-\tau)}} +$$

$$\int_\tau^t d\lambda \iint_\Omega (t-\lambda)^i G_0^{(q,\lambda)}(P,q,t-\lambda)\Phi_{i+1}(q,\lambda;Q,\tau)dS_q, \tag{6}$$

где $G_{i+1}^{(Q,\tau)}(P,Q,t-\tau)$ – фундаментальные решения уравнения $\delta_0 u = \frac{\partial u}{\partial t} - a(Q,\tau)\Delta u$.

Неизвестные функции $\Phi_i(P,t;Q,t)$, i = 1, 2 подбираются так, чтобы удовлетворяли уравнениям $\delta^i u = 0$, i = 1, 2. Используя свойства объемных потенциалов относительно функции $\Phi_i(P,t;Q,t)$, i = 1, 2, получаем следующие интегральные уравнения Вольтера–Фредгольма 2-го рода:

$$\Phi_i(P,t;Q,\tau) = K_i(P,t;Q,\tau) + \int_\tau^t d\lambda \iint_S K_i(P,t;Q,\lambda)\Phi_i(q,\lambda;Q,\tau)dS_q, \quad (7)$$

где ядра

$$K_1(P,t;Q,\tau) = [a(P,t) - a(Q,\tau)]\Delta G_0^{(Q,\tau)}(P,t;Q,\tau), \quad (8)$$

$$K_2(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = [a^2(Q,\tau) - a^2(P,t)](t-\tau)\Delta^2 G_0^{(Q,\tau)} \times$$
$$\times (P,Q,t-\tau) + 2[a(Q,\tau) - a(P,t)]\Delta G_0^{(Q,\tau)}(P,Q,t-\tau) -$$
$$-\delta a(P,t)(t-\tau)\Delta G_0^{(Q,\tau)}(P,Q,t-\tau) - 2a(P,t)(t-\tau)\times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial t}\Delta G_0^{(Q,\tau)}(P,Q,t-\tau) + 2a(P,t)(t-\tau)(\frac{\partial a(P,t)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} +$$
$$+ \frac{\partial a(P,t)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y})]\Delta G_0^{(Q,\tau)}(P,Q,t-\tau) - \delta B(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y})(t-\tau)\times$$
$$\times G_0^{(Q,\tau)}(P,Q,t-\tau) - B(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y})\delta G_0^{(Q,\tau)}(P,Q,t-\tau), \quad (9)$$

так как $a(P,t) \in C_{P,t}^{2,1}$, $b_i(P,t) \in C_{P,t}^{2,1}$, $i = 0,1,2$, то легко убедиться, что выше приведенные ядра удовлетворяют оценкам:

$$\left|K_i(P,t;Q,\tau)\right| \le \frac{M}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\delta \frac{r^2}{t-\tau}}, \; i = 1, 2. \quad (10)$$

т.е. имеют слабые интегрируемые особенности. Поэтому существование решения интегрального уравнения можно доказать методом последовательного приближения и показать, что справедливы оценки

$$\left|\Phi_i(P,t;Q,\tau)\right| \le \frac{M}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\delta \frac{r^2}{t-\tau}}, \; i = 1, 2. \quad (11)$$

2. Построение специальных ядер и специальных потенциалов.

При помощи линейно независимых решений $G_i(P,t;Q,t)$, i = 1, 2 уравнения $\delta^2 u = 0$ построим новые ядра:

$$H_1(P,t;Q,\tau) = 2a(Q,\tau)\frac{\partial^3 G_1(P,t;Q,\tau)}{\partial n_P{}^3} + 3\frac{\partial G_0(P,t;Q,\tau)}{\partial n_P} =$$
$$= [2a(Q,\tau)\frac{\partial^3 G_1^{(Q,\tau)}(P,Q,t-\tau)}{\partial n_P{}^3} + 3\frac{\partial G_0^{(Q,\tau)}(P,Q,t-\tau)}{\partial n_P}] +$$
$$+ [2a(Q,\tau)\frac{\partial^3 G_{11}(P,t;Q,\tau)}{\partial n_P{}^3} + 3\frac{\partial G_{01}(P,t;Q,\tau)}{\partial n_P}] =$$
$$= H_{11}(P,t;Q,\tau) + H_{12}(P,t;Q,\tau), \quad (12)$$

$$H_2(P,t;Q,\tau) = 2a(Q,\tau)\frac{\partial^2 G_1(P,t;Q,\tau)}{\partial n_P{}^2} - G_0(P,t;Q,\tau) =$$
$$= [2a(Q,\tau)\frac{\partial^2 G_1^{(Q,\tau)}(P,Q,t-\tau)}{\partial n_P{}^2} - G_0^{(Q,\tau)}(P,Q,t-\tau)] +$$
$$+ [2a(Q,\tau)\frac{\partial^2 G_{11}(P,t;Q,\tau)}{\partial n_P{}^2} - G_{01}(P,t;Q,\tau)] =$$
$$= H_{21}(P,t;Q,\tau) + H_{22}(P,t;Q,\tau). \quad (13)$$

После несложного преобразования главные слагаемые представимы в виде

$$H_{11}(P,t;Q,\tau) = \frac{(r\frac{\partial r}{\partial n})^3}{16\pi a^3(Q,\tau)(t-\tau)^3} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4a(Q,\tau)(t-\tau)}}; \quad (14)$$

$$H_{21}(P,t;Q,\tau) = -\frac{(r\frac{\partial r}{\partial n})^2}{8\pi a^2(Q,\tau)(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4a(Q,\tau)(t-\tau)}}. \quad (15)$$

Относительно вторых слагаемых справедливы утверждения.

Лемма 1. Интегральные части $H_{12}(P,t;Q,\tau)$, $H_{22}(P,t;Q,\tau)$ равенств (12)–(13) имеют следующие оценки:

$$\left|H_{12}(P,t;Q,\tau)\right| \le \frac{M}{(t-\tau)} e^{-\delta \frac{r^2}{t-\tau}}, \quad (16)$$

$$\left|H_{22}(P,t;Q,\tau)\right| \le \frac{M}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\delta \frac{r^2}{t-\tau}}. \quad (17)$$

Лемма 2. Если $a(P,t) \in C_P^2$, $b_i(P,t) \in C_P^2$, $i = 0, 1, 2$, то справедливы оценки:

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_P} H_{i2}(P,t;Q,\tau)\right| \le \frac{M}{(t-\tau)} e^{-\delta \frac{r^2}{t-\tau}}, \; i = 1, 2. \quad (18)$$

Построим поверхностные потенциалы с ядрами $H_i(P,t;Q,t)$, i = 1, 2 и приведем основные свойства этих потенциалов:

$$W_1(P,t)=\int_0^t d\tau\int_S \sigma_0(Q,\tau)H_1(P,t;Q,\tau)dS_Q=$$
$$=\int_0^t d\tau\int_S \sigma_0(Q,\tau)H_{11}(P,t;Q,\tau)dS_Q+ \qquad (19)$$
$$+\int_0^t d\tau\int_S \sigma_0(Q,\tau)H_{12}(P,t;Q,\tau)dS_Q \quad W_{11}(P,t)+W_{12}(P,t),$$
$$W_2(P,t)=\int_0^t d\tau\int_S \sigma_1(Q,\tau)H_2(P,t;Q,\tau)dS_Q=$$
$$=\int_0^t d\tau\int_S \sigma_1(Q,\tau)H_{21}(P,t;Q,\tau)dS_Q+ \qquad (20)$$
$$+\int_0^t d\tau\int_S \sigma_1(Q,\tau)H_{22}(P,t;Q,\tau)dS_Q \quad W_{21}(P,t)+W_{22}(P,t).$$

Лемма 3. Если $\sigma_0(P,t)$ – непрерывная функция на кривой $S\in C^{1+\alpha}$, то имеет место равенство
$$\lim_{P\to P_0\in S}W_1(P,t)=\sigma_0(P_0,t)+W_1(P_0,t). \qquad (21)$$

Доказательство. Потенциал $W_1(P,t)$ разбиваем на две части $W_1(P,t)=W_{11}(P,t)+W_{12}(P,t)$, где $W_{11}(P,t)$ имеет ядро $H_{11}(P,t;Q\tau)$, потенциал $W_{12}(P,t)$ имеет ядро $H_{12}(P,t;Q\tau)$. Распишем $W_{11}(P,t)$ в следующем виде:

$$W_{11}(P,t)=\int_0^t d\tau\int_S \sigma_0(Q,\tau)H_{11}(P,t;Q,\tau)dS_Q=$$
$$=\int_0^t d\tau\int_S \sigma_0(Q,\tau)\frac{(r\frac{\partial r}{\partial n})^3}{16\pi a^3(Q,\tau)(t-\tau)^3}e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4a(Q,\tau)(t-\tau)}}dS_Q=$$
$$=\int_0^t d\tau\int_S \sigma_0(Q,\tau)\frac{(r\frac{\partial r}{\partial n})^3}{16\pi a^3(P,t)(t-\tau)^3}e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4a(P,t)(t-\tau)}}dS_Q+$$
$$+\int_0^t d\tau\int_S \sigma_0(Q,\tau)\Big[\frac{(r\frac{\partial r}{\partial n})^3}{16\pi a^3(Q,\tau)(t-\tau)^3}-$$
$$-\frac{(r\frac{\partial r}{\partial n})^3}{16\pi a^3(P,t)(t-\tau)^3}\Big]e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4a(Q,\tau)(t-\tau)}}dS_Q+\int_0^t d\tau\int_S \sigma_0(Q,\tau)\times$$
$$\times\frac{(r\frac{\partial r}{\partial n})^3}{16\pi a^3(P,t)(t-\tau)^3}\Big[e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4a(Q,\tau)(t-\tau)}}-e^{-\frac{r_{PQ}^2}{4a(P,t)(t-\tau)}}\Big]dS_Q+$$
$$=W_{11}'(P,t)+W_{11}''(P,t)+W_{11}'''(P,t). \qquad (22)$$

В статье [2] приведено доказательства следующего:
$$\lim_{P\to P_0}W_{11}'(P,t)=\sigma_0(P_0,t)+W_{11}'(P_0,t),$$
$$|W_{11}''(P,t)|\le 2M_0M\sqrt{t},\ |W_{11}'''(P,t)|\le 2M_0M\sqrt{t}.$$

Так как интегралы $W_{11}''(P,t)$, $W_{11}'''(P,t)$ сходятся абсолютно и равномерно, то выполняется равенство
$$\lim_{P\to P_0}W_{11}(P,t)=\sigma_0(P_0,t)+W_{11}(P_0,t).$$

При помощи леммы 1 легко убедиться в равномерной сходимости интегральной слагаемой $W_{12}(P,t)$.

Лемма 4. Если $\sigma_0(P,t)$ – непрерывная функция на кривой $S\in C^{2+\alpha}$, то справедливо следующее:
$$\lim_{P\to P_0\in S}\frac{\partial}{\partial n}W_1(P,t)=2\chi(P_0)\sigma_1(P_0,t)+\frac{\partial}{\partial n}W_1(P_0,t), \qquad (23)$$
где $\chi(P_0)$ – кривизна кривой S в точке P_0.

Лемма 5. Если $\sigma_1(P,t)$ – непрерывная функция на кривой $S\in C^{1+\alpha}$, то выполняются равенства:
$$\lim_{P\to P_0\in S}W_2(P,t)=W_{22}(P_0,t). \qquad (24)$$
$$\lim_{P\to P_0\in S}\frac{\partial}{\partial n}W_1(P,t)=\sigma_1(P,t)+\frac{\partial}{\partial n}W_{22}(P_0,t). \qquad (25)$$

3. Существования решения краевой задачи (1)–(5). Решение краевой задачи (1)–(5) будем искать в виде суммы:

$$u(P,t)=V_1(P,t)+V_2(P,t)+V(P,t)+W_1(P,t)+W_2(P,t)=$$
$$=\iint_\Omega f_0(Q,\tau)G_0(P,t;Q,\tau)dS_Q+\iint_\Omega 1f_0(Q,\tau)G_1(P,t;Q,\tau)dS_Q+$$
$$+\int_0^t d\tau\iint_\Omega F(Q,\tau)(t-\tau)G_0(P,t;Q,\tau)dS_Q+$$
$$\int_0^t d\tau\int_S \sigma_0(Q,\tau)H_1(P,t;Q,\tau)dS_Q+$$
$$+\int_0^t d\tau\int_S \sigma_1(Q,\tau)H_2(P,t;Q,\tau)dS_Q, \qquad (26)$$

где $\sigma_0(P,t)\in C$, $\sigma_1(P,t)\in C'$ – неизвестные функции. Нетрудно убедиться, что решение $u(P,t)$, определяемое равенством (26), удовлетворяет неоднородному уравнению (1) и начальным условиям (2)–(3).

Неизвестные функции $\sigma_0(P,t)$, $\sigma_1(P,t)$ подбираем так, чтобы выполнялись краевые условия (4), (5).

На основании свойств потенциалов $W_i(P,t)$, $i=1,2$ относительно неизвестных функций $\sigma_0(P,t)$, $\sigma_1(P,t)$ получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\sigma_0(P_0,t)+\int_0^t d\tau\int_S \sigma_0(Q,\tau)H_1(P_0,t;Q,\tau)dS_Q+$$
$$+\int_0^t d\tau\int_S \sigma_1(Q,\tau)H_2(P_0,t;Q,\tau)dS_Q=\Phi_0(P_0,t),$$

$$2\chi(P_0)\sigma_0(P_0,t)+\sigma_1(P_0,t)+\int_0^t d\tau\int_S \sigma_0(Q,\tau)\frac{\partial}{\partial n}H_1\times$$

$$\times(P_0,t;Q,\tau)dS_Q+\int_0^t d\tau\int_S \sigma_1(Q,\tau)\frac{\partial}{\partial n}H_2(P_0,t;Q,\tau)dS_Q=$$

$$=\Phi_1(P_0,t), \qquad (27)$$

где $\Phi_0(P_0)$, $\Phi_1(P_0)$ – известные функции, выражающиеся через известные функции $F(P,t)$, $f_i(P)$, $\varphi_i(P_0,t)$, $i=0,\ 1$.

Так как кривая $S\in C^{2+\alpha}$, то легко видеть, что ядра $\frac{\partial^i}{\partial n^i}H_{i+1}(P_0,t;Q,\tau)$ удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{\partial^i}{\partial n^i}H_{i+1}(P_0,t;Q,\tau)\right|\le\frac{M}{t-\tau}e^{-\delta\frac{r^2_{P_0Q}}{t-\tau}}.$$

Таким образом, полученную систему (27) можно решить методом последовательных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа // М.: Мир, 1968. С. 423.

2. *Орынбасаров М.О.* Об одной задаче Неймана для общего бипараболического уравнения // Изв. АН КазССР. Серия физ.-матем. 1973. №1. С. 51-58.

Резюме

Мақалада параметрикс әдісін қолданып бипараболалық теңдеудің сызықты тәуелсіз шешімдері құрылған. Олар арқылы арнайы ядролар және арнайы беттік потенциалдар құрылған. Осы потенциалдардың негізгі қасиеттері дәлелденген. Арнайы потенциалдар арқылы шекаралық есеп әлсіз ерекшелігі бар ядролы интегралды теңдеулер жүйесіне келтірілген.

Summary

In the article there are constructed liner independent solutions of the biparabolic equation by the parametrics method. There are constructed special corns and special surface potentials by them. Main properties of these potentials are proved. By using special potentials the value-boundary problem is leaded to the system of integral equations with corns with weak peculiarity.

КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 26.12.05г.