УДК 517.927.25

А. М. САРСЕНБИ

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ БАЗИСНОСТИ РИССА СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Получены конструктивные легко проверяемые необходимые и достаточные условия базисности Рисса систем корневых векторов несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка, заданного на конечном интервале числовой оси.

1. Введение. В настоящей работе установлены необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых функций несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка.

В известной монографии М. А. Наймарка [1] излагаются типы краевых условий для обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов порядка n, где вводятся понятия нерегулярных, регулярных, усиленно регулярных краевых условий.

В 1962 году В. П. Михайловым [2], а затем в 1964 году Г. М. Кессельманом [3] (см. также [4]) было установлено, что система корневых функций обыкновенного дифференциального оператора n-го порядка с усиленно регулярными краевыми условиями образует базис Рисса. Однако с тех пор кроме усиленно регулярных краевых условий так и не удалось указать какие-нибудь другие типы краевых условий, обеспечивающих базисность корневых функций.

Значительный шаг в изучении вопросов базисности систем корневых функций несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов сделан В. А. Ильиным и его последователями. В 1983 году В. А. Ильиным [5] получены необходимые и достаточные условия безусловной базисности систем корневых функций дифференциального оператора второго порядка, а в работе [6] им показано, что для краевых условий, являющихся регулярными (но не усиленно регулярными), свойство базисности корневых функций определяется значениями коэффициентов дифференциального оператора, причем это свойство возникает или пропадает при малых изменениях коэффициентов.

Таким образом, выясняется, что в случае регулярных краевых условий на базисность корневых функций влияют как поведение коэффициентов оператора, так и конкретный вид краевых условий. Эти факты позволяют говорить о невозможности выделения каких-нибудь типов краевых условий, кроме усиленно регулярных, обеспечивающих базисность корневых функций.

К настоящему времени других условий, кроме условия В. А. Ильина, позволяющих судить о базисности систем корневых функций обыкновенного дифференциального оператора, по крайней мере, известных нам, не установлено.

2. Определение корневых функций. На произвольном конечном интервале G числовой оси рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu = -u'' + q(x)\,u \tag{1}$$

с комплекснозначным потенциалом $q(x) \in L_1(G)$.

Обычно выражение (1) называют дифференциальным выражением, а дифференциальный оператор порождается выражением (1) и некоторыми конкретными краевыми условиями.

Следуя В. А. Ильину [5, 6], введем понятие обобщенных корневых функций (ОКФ) формального дифференциального оператора (1).

Системой ОКФ оператора L мы назовем произвольную систему комплекснозначных функций $\{u_k(x)\}$, $k = 1,2,\ldots$, каждая из которых абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной в интервале G и для некоторого комплексного числа λ_k почти всюду на G удовлетворяет уравнению

$$Lu_k = \lambda_k u_k - \theta_k u_{k-1}, \tag{2}$$

где число $\theta_k = 0$, либо $\theta_k = 1$ (в этом случае $\lambda_k = \lambda_{k-1}$), $\theta_1 = 0$.

При $\theta_k = 0$ функцию $u_k(x)$ называем обобщенной собственной функцией, а при $\theta_k = 1$ – обобщенной присоединенной функцией.

Система ОКФ пронумерованы так, что вслед за каждой обобщенной собственной функцией стоят соответствующие ей присоединенные функции.

Формально сопряженный оператор к оператору L обозначим следующим образом:

$$L^*\upsilon = -\upsilon'' + \overline{q}(x)\,\upsilon. \tag{3}$$

Сформулируем теперь теорему В. А. Ильина [5, 6].

Теорема (В. А. Ильин). Пусть $\{u_k(x)\}$ произвольная полная и минимальная в $L_2(G)$ система ОКФ оператора L, у которой длины всех цепочек присоединенных функций равномерно ограничены, а система $\{\upsilon_k(x)\}$, являющаяся биортогонально сопряженной к системе $\{u_k(x)\}$, состоит из ОКФ сопряженного оператора (3), т.е. почти всюду в G

$$L^*\upsilon_k = \overline{\lambda}_k\upsilon_k - \theta_{k+1}\upsilon_{k+1},$$

где числа λ_k, θ_k те же, что и в уравнении (2).

Если

$$\left|\,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda_k}\,\right| \le const, \tag{4}$$

то для того чтобы каждая из систем $\left\{u_k(x)\big/\|u_k\|_{L_2(G)}\right\}$, $\left\{\upsilon_k(x)\big/\|\upsilon_k\|_{L_2(G)}\right\}$ являлась базисом Рисса в $L_2(G)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два неравенства:

$$\sum_{t\le\left|\sqrt{\lambda_k}\right|\le t+1} 1 \le const, \tag{5}$$

$$\|u_k\|_{L_2(G)}\cdot\|\upsilon_k\|_{L_2(G)} \le const \tag{6}$$

($\sqrt{\lambda_k}$ – это тот корень из числа λ_k, для которого $\mathrm{Re}\,\lambda_k \ge 0$).

Условие (6) называют условием базисности В. А. Ильина.

3. Некоторые замечания. Понятие базисов Рисса было впервые введено Н. К. Бари [7] (см. также [8, 9]).

Имеются примеры базисов (нормированных), не являющихся базисами Рисса [10, 11] (см. также [9]).

Имеются примеры полных и минимальных систем, не являющихся базисами [7].

Необходимость условия (6) для произвольных базисов, не связанных с дифференциальным оператором, доказана в [9, с. 372].

Достаточность условия (6) для безусловной базисности систем, связанных с дифференциальным оператором второго порядка, впервые установлена В. А. Ильиным в работе [5].

Тот факт, что всякий базис из корневых функций регулярного дифференциального оператора второго порядка является безусловным базисом, установлен автором настоящей статьи в работе [12].

Теорема В. А. Ильина действует и в случае, когда общее число присоединенных функций бесконечно, т.е. в ситуации, в которой неприменимы другие методы изучения базисности (например, методы, развитые в монографии М. А. Наймарка [1], методы теории спектральных операторов, излагаемые в монографии Н. Дандорфа и Дж. Т. Шварца [4]).

4. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса.

Теорема 1. Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система ОКФ оператора L и длины цепочек присоединенных функций равномерно ограничены. Биортогонально сопряженная система $\{\upsilon_k(x)\}$ является обобщенным корневым вектором оператора L^*. Тогда, для того чтобы каждая из систем $\{u_k(x)\}$, $\{\upsilon_k(x)\}$ являлась базисом Рисса в $L_2(G)$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_k}\right| \le const,$$

$$\sum_{t\le\left|\sqrt{\lambda_k}\right|\le t+1} 1 \le const,$$

$$M_3 \le \left\| u_k \right\|_{L_1(G)} \le M_4,\ M_5 \le \left\| \upsilon_k \right\|_{L_1(G)} \le M_6. \quad (7)$$

В отличие от условия В. А. Ильина (6), оценки в условии (7) сформулированы в терминах нормы класса $L_1(G)$.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть системы $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ образуют базис Рисса. Тогда выполнены неравенства (4), (5) (см., например, [6]), а также оценки

$$\alpha_1 \le \left\| u_k \right\|_{L_2(G)} \le \beta_1,\ \alpha_2 \le \left\| \upsilon_k \right\|_{L_2(G)} \le \beta_2,$$

т.е. $\{u_k(x)\}$, $\{\upsilon_k(x)\}$ – почти нормированные в $L_2(G)$ системы. Теперь воспользуемся следующими оценками для корневых функций оператора L, полученными В. В. Тихомировым в работе [13], которые при условии (4) имеют вид

$$C_1\left\| u_k \right\|_{L_q(G)} \le C_2\left\| u_k \right\|_{L_S(G)} \le C_3\left\| u_k \right\|_{L_q(G)}, \quad (8)$$

где $1 \le q \le s \le +\infty$ (константы C_1, C_2, C_3 зависят лишь от меры области G и от порядка присоединенной функции). Так как системы $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ подчинены одинаковым условиям, то эти же оценки справедливы и для системы $\{\upsilon_k(x)\}$. По условию теоремы длины цепочек присоединенных функций равномерно ограничены и поэтому постоянные C_1, C_2, C_3 в (8) можно выбрать не зависящими от номера k. Полагая в (8) $q=1$, $s=2$ и учитывая почти нормированность в $L_2(G)$ системы $\{u_k(x)\}$, из неравенств (8) получаем

$$M_3 \le \left\| u_k \right\|_{L_1(G)} \le M_4.$$

Точно также доказывается второе неравенство в (7).

Пусть теперь выполнены условия (4), (5) и (7). Первое из неравенств (7) подставим в (8) при $q=1$, $s=2$, получим

$$C_1 \cdot M_3 \le C_2\left\| u_k \right\|_{L_2(G)} \le C_3 \cdot M_4,$$

откуда следует почти нормированность в $L_2(G)$ системы $\{u_k(x)\}$. Аналогичным образом убеждаемся в почти нормированности в $L_2(G)$ системы $\{\upsilon_k(x)\}$. Полученные факты обеспечивают выполнение условия В. А. Ильина (6). Выполнение условий (4)–(6) позволяют утверждать безусловную базисность систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ (см. [5]).

Таким образом, мы имеем безусловные почти нормированные в $L_2(G)$ базисы $\{u_k(x)\}$, $\{\upsilon_k(x)\}$. А такие базисы являются базисами Рисса. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
2. *Михайлов В.П.* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144, №5. С. 981-984.
3. *Кессельман Г.М.* // Изв. вузов. 1964. №2. С. 82-93.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы: Спектральные операторы. М., 1974. Ч. 3.
5. *Ильин В.А.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, №5. С. 789-793.
6. *Ильин В.А.* // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, №9. С. 1516-1529.
7. *Бари Н.К.* // Ученые записки. М.: МГУ, 1951. Т. 4, вып. 142. С. 69-106.
8. *Качмаж С.Г., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М., 1958.
9. *Гохберг И.И., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
10. *Бабенко К.И.* // ДАН СССР. 1948. Т. 62, №2. С. 157-160.
11. *Гапошкин В.Ф.* // Математический сборник. 1958. Т. 46(88), №3. С. 359-372.
12. *Сарсенбиев А.М.* О свойствах корневых векторов некоторых несамосопряженных дифференциальных операторов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1989. 16 с.
13. *Тихомиров В.В.* // ДАН СССР. 1983. Т. 274, №4. С. 807-810.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова
г. Шымкент

Поступила 30.06.05г.