

## ТРЕХМЕРНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ В ЗАДАЧЕ ПРОДОЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ ДВУГРАННОГО УГЛА ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Получено автомодельное решение задачи продольного обтекания двугранного угла потоком вязкой несжимаемой жидкости.

Снижение величины турбулентного сопротивления трения является существенным резервом повышения аэродинамического совершенства ряда транспортных средств, так как составляет почти основную часть их полного сопротивления.

Управление течением в пограничном слое в основном осуществляется с помощью активных или пассивных способов воздействия на поток. Известны такие активные способы управления, как вдув и отсос среды в пограничном слое с помощью специальных устройств [1]. Поскольку эти способы принадлежат к числу энергозатратных, то значительный интерес представляют пассивные способы управления, в число которых входит, например, способ управления течением с помощью упорядоченного микрорельефа (в частности, в виде продольных микроребер-риблетгов) [2]. Будучи достаточно простыми по конструкции и не требующими дополнительных энергозатрат, эти устройства способны обеспечить снижение сопротивления трения в некоторых случаях до 10%.

В работе [3] рассмотрена возможность применения обтекаемых в продольном направлении оребренных поверхностей для снижения сопротивления турбулентного трения в пограничном слое. В частности, экспериментально было показано, что при турбулентном режиме течения в ядре канала треугольного поперечного сечения поток в угловых областях (в диапазоне углов до  $30^\circ$ ) остается ламинарным

на участках до 40% по высоте треугольника. Данный эффект объяснялся подавлением турбулентности в угловых областях из-за малости поперечных масштабов. В работе [4] отмечались аналогичные эффекты, приводившие к заметному снижению коэффициента турбулентного трения в эксцентрических кольцевых каналах.

Таким образом, значительный интерес представляет собой погранслоинное течение вязкой несжимаемой жидкости вдоль поверхностей двугранного угла (рис. 1).

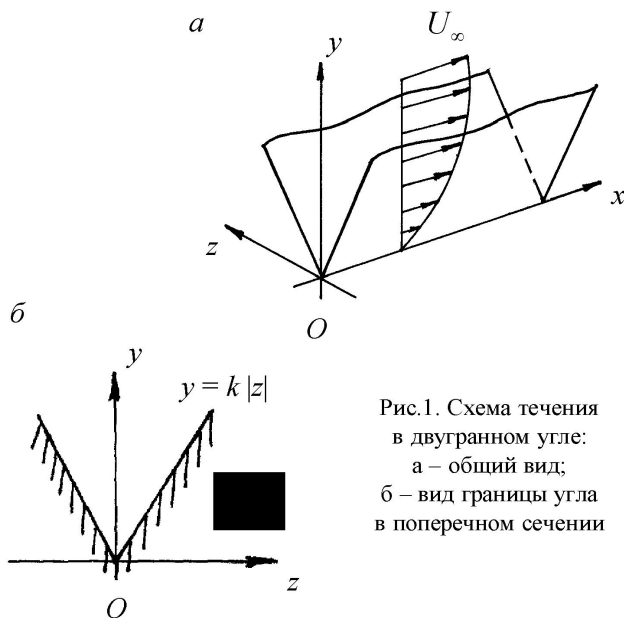


Рис.1. Схема течения в двугранном угле:  
а – общий вид;  
б – вид границы угла в поперечном сечении

Здесь течение осуществляется по оси  $Ox$  вдоль внутренних поверхностей двугранного угла с постоянной скоростью на бесконечности, равной  $U_\infty$  (рис. 1, а).

В поперечном сечении слоя смещения граница описывается с помощью уравнения прямой  $y = k|z|$ , где  $k$  – ее угловой коэффициент (рис. 1, б).

Уравнения трехмерного стационарного пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости для рассматриваемой задачи имеют вид [1]

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

где  $x, y, z$  – декартовы координаты;  $u, v$  – составляющие вектора скорости;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости, причем  $\nu = \text{const}$ ; при следующих граничных условиях:

$$\begin{cases} u = 0, v = 0 \text{ при } \mp k|z|, \mp z \geq 0, \\ u \rightarrow U_\infty \text{ при } y \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty, \\ u = U_\infty \text{ при } x = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Представляет интерес вопрос существования класса точных решений уравнений (1), в частности так называемых «подобных» или *автомоделных* решений.

Покажем, что задача (1), (2) является *автомоделной*, т.е. система уравнений в частных производных может быть также сведена к одному обыкновенному дифференциальному уравнению.

Представим продольную составляющую вектора скорости в пограничном слое в виде [5, 6]

$$u = \frac{1}{2} U_\infty (1 + k^2) f'(\eta), \quad (3)$$

где  $U_\infty$  – скорость потока на  $\infty$ ; функция  $f(\eta)$  – функция одной переменной  $\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} (y - k|z|)$ , скомбинированной из физических переменных  $x, y, z$ ; здесь  $k$  – угловой коэффициент прямой  $y = k|z|$ .

Общее выражение для функции тока  $\psi$  может быть получено по формуле

$$\begin{aligned} \psi &= \int_0^\eta u dy = U_\infty (1 + k^2) \int_0^\eta \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} f'(\eta) d\eta = \\ &= (1 + k^2) \sqrt{\nu U_\infty x} f(\eta), \end{aligned} \quad (4)$$

а для поперечной составляющей вектора скорости  $v$

$$v = \frac{1}{2} (1 + k^2) \sqrt{\frac{U_\infty \nu}{x}} (f'\eta - f). \quad (5)$$

Подстановка выражений (3), (5) и соответствующих производных в уравнение движения системы (1) приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$f''' + ff'' = 0 \quad (6)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{cases} f' = 0, \text{ при } \eta = 0, \\ f' \rightarrow \frac{2}{1 + k^2}, \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (7)$$

Краевая задача (6), (7) по внешнему виду совпадает с известной классической задачей Блазиуса продольного обтекания потоком несжимаемой вязкой жидкости полубесконечной тонкой пластинки [7]. Различие заключается лишь в виде переменной  $\eta$ . В задаче Блазиуса  $\eta = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$ , а в рассматриваемой задаче обтекания двугранного угла –  $\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} (y - k|z|)$ .

Следует отметить, что при  $k = 0$  задача обтекания двугранного угла полностью соответствует задаче обтекания плоской пластины потоком вязкой несжимаемой жидкости; при  $z = 0$ , т.е. в плоскости  $Oxy$ , решения этих задач также совпадают.

Уравнение (6) с соответствующими граничными условиями задачи Блазиуса интегрируется численно [7] и дает следующие значения безразмерной скорости (см. табл.).

Значения безразмерной продольной составляющей скорости

$\eta$	$\frac{u}{U_\infty} = \frac{1}{2} (1 + k^2) f'(\eta)$	$\eta$	$\frac{u}{U_\infty} = \frac{1}{2} (1 + k^2) f'(\eta)$
0	0	1,5	0,8460
0,1	0,0664	1,6	0,8761
0,2	0,1328	1,7	0,9018
0,3	0,1989	1,8	0,9233
0,4	0,2647	1,9	0,9411
0,5	0,3298	2,0	0,9555
0,6	0,3938	2,1	0,9670
0,7	0,4563	2,2	0,9759
0,8	0,5168	2,3	0,9827
0,9	0,5748	2,4	0,9878
1,0	0,6298	2,5	0,9915
1,1	0,6813	2,6	0,9942
1,2	0,7290	2,7	0,9962
1,3	0,7725	2,8	0,9975
1,4	0,8115	2,9	0,9984

Табличное решение задачи позволяет найти прежде всего *напряжение трения* на поверхности двугранного угла по направлениям  $y$  и  $z$ :

$$\tau_{wy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=k|z|} = \frac{1}{4} (1 + k^2) \mu \sqrt{\frac{U_\infty^3}{\nu x}} f''(0),$$

$$\tau_{wz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{y=k|z|} = \pm \frac{1}{4} (1 + k^2) k \mu \sqrt{\frac{U_\infty^3}{\nu x}} f''(0).$$

Определяя приближенно по таблице

$$(1 + k^2) f''(0) = (1 + k^2) \frac{f'(0,1) - f'(0)}{0,1} = 1,328,$$

получаем следующие формулы распределения *напряжения трения* по поверхности двугранного угла:

$$\tau_{wy} = 0,332 \sqrt{\frac{\mu \rho U_\infty^3}{x}}, \quad (8)$$

$$\tau_{wz} = \pm 0,332 k \sqrt{\frac{\mu \rho U_\infty^3}{x}}. \quad (9)$$

Формула (8) по виду полностью совпадает с известной формулой Блазиуса распределения напряжения трения по поверхности плоской пластины, т.е. закон изменения напряжения трения на стенке в направлении  $y$  остается прежним. Однако в направлении  $z$  появляется ранее отсутствовавшее в задаче Блазиуса напряжение трения  $\tau_{wz}$ . Причем, пока  $k < 1$ , оно составляет лишь часть от  $\tau_{yz}$ . При  $k = 1$  эти две величины совпадают ( $\tau_{yz} = \tau_{wz}$ ), а при  $k > 1$  напряжение трения на стенке двугранного угла превышает  $\tau_{yz}$ . При возрастании  $k$  эта величина становится достаточно большой. В предельном случае имеет место неопределенность вида  $\infty \cdot 0$ , раскрытие которой требует дополнительного исследования.

Для *местного коэффициента сопротивления трения* имеем

$$c_{fy} = \frac{\tau_{wy}}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad (10)$$

$$c_{fz} = \pm \frac{\tau_{wz}}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = \pm \frac{0,664 k}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad \text{где } \text{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu}. \quad (11)$$

Рассмотрим безразмерное распределение скоростей по сечениям пограничного слоя. Согласно данным табл. 1 и виду новой переменной  $\eta = \eta(x, y, z)$  построим теоретическую кривую, соответствующую данному универсальному профилю продольной

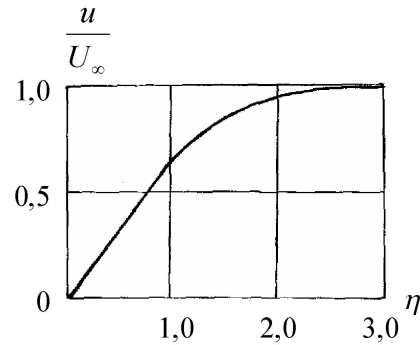


Рис. 2. Безразмерное распределение скорости по сечениям пограничного слоя ( $U_\infty = 8$  см/с,  $x = 15$  см)

составляющей вектора скорости  $\frac{u}{U_\infty}$  в зависимости от переменной  $\eta$  (рис. 2).

Следует отметить, что задача автомодельна не только по оси  $x$ , но и по оси  $z$ . В каждом сечении  $z$  имеет место параллельный перенос, как показано на схеме (рис. 3), того же самого универсального профиля скорости (рис. 2).

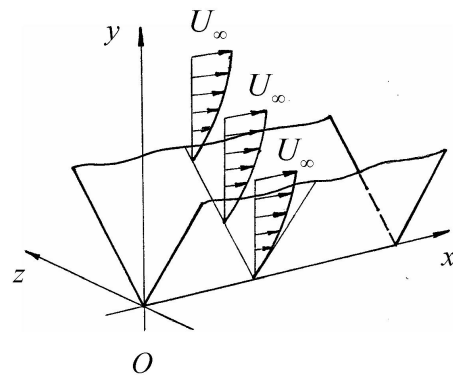


Рис. 3. Схема течения по сечениям  $z$

Заметим, что семейство прямых вида  $\eta = y - k|z| = \text{const}$  представляет собой совокупность линий одинаковых скоростей (*изотакхи* потока).

На рис. 4 видно, что погранслоное течение в двугранном угле обладает одновременно свойствами как течения на пластине Блазиуса, так и течения

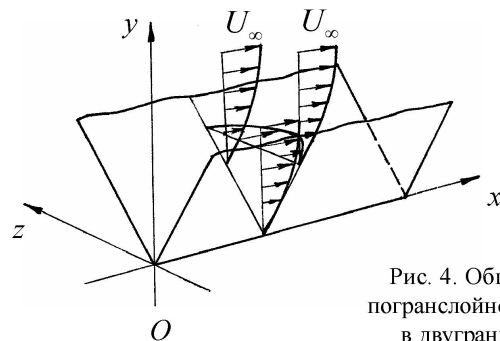


Рис. 4. Общая схема погранслоного течения в двугранном угле

Пуазейля в трубе. Здесь имеет место суперпозиция двух классических течений.

На рис. 5 приведены профили продольной составляющей по сечениям  $y$  при различных растворах двугранного угла, т.е. при различных значениях величины  $k$ . С ростом  $k$  (чем острее двугранный угол) величина градиента скорости увеличивается, соответственно увеличивается и коэффициент сопротивления трения (рис. 5, б).

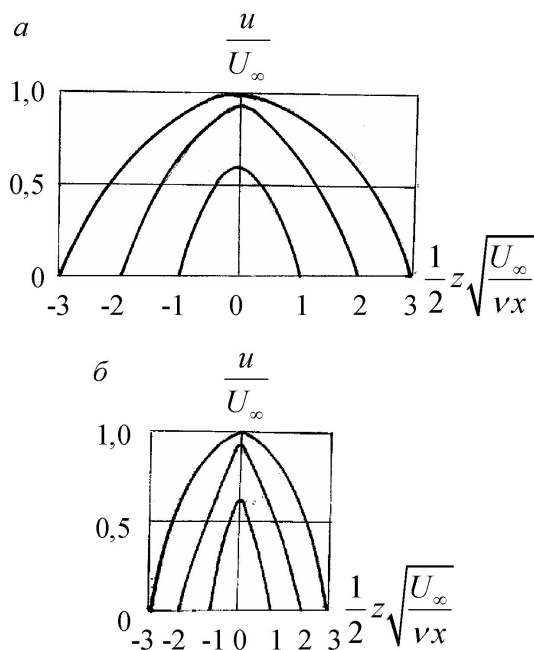


Рис. 5. Профили продольной составляющей вектора скорости по высоте пограничного слоя при различных значениях параметра  $k$ : а –  $k = 1$ ; б –  $k = 2$

На схеме (рис. 6) приведены профили продольной составляющей вектора скорости по сечениям пограничного слоя по  $y$ .

Следует отметить, что для рассматриваемой задачи кривые изменения условных толщин пограничного слоя при продольном обтекании двугранного угла представляют собой *изотакси* потока.

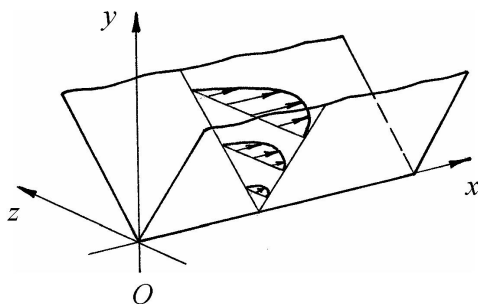


Рис. 6. Вид профилей продольной составляющей вектора скорости в двугранном угле

Действительно, при  $y = \delta(x)$ ,  $y = \delta^*(x)$  или  $y = \delta^{**}(x)$

имеем  $u = \frac{1}{2} U_\infty (1 + k^2) f'(const) = U_\infty \cdot const$ , скорость на внешней границе  $U_\infty$  – постоянная величина.

С учетом [7] будем иметь

$$\frac{u}{U_\infty} = f_1\left(\frac{y}{\delta}\right) = f_2\left(\frac{y}{\delta^*}\right) = f_3\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right), \quad (12)$$

где  $\delta = 5,0 \sqrt{\frac{v x}{U_\infty}}$  – толщина пограничного слоя,

$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = 1,721 \sqrt{\frac{v x}{U_\infty}}$  – толщина вытеснения,

$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = 0,664 \sqrt{\frac{v x}{U_\infty}}$  – толщина потери

импульса.

Выражение (12) описывает свойство подобия (аффинного подобия) профилей скорости в сечениях ламинарного пограничного слоя при продольном обтекании двугранного угла: в сходственных точках

этих сечений  $\frac{y}{\delta} = idem$ ,  $\frac{y}{\delta^*} = idem$ ,  $\frac{y}{\delta^{**}} = idem$ , от-

ношения составляющей вектора скорости  $u$  к внешней скорости  $U_\infty$  будут одинаковыми, а свойство *автоподобности* эквивалентно *аффинному подобию*.

На основании полученных в работе результатов представляется возможной модификация граничных условий в задаче о пограничном слое на продольных микроребрах. В этом случае для некоторой эффективной поверхности, проходящей через их вершины (конфигурация ребер в поперечнике выбрана, например, в виде треугольника), условие прилипания среды пограничного слоя будет выполняться лишь на прямых, совпадающих с их вершинами. Между ребрами скорость потока будет изменяться по параболическому закону от 0 до максимума на оси течения. Именно это обстоятельство позволяет существенно снизить сопротивление трения.

Автор статьи выражает благодарность Ш. М. Айталиеву за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
2. Уолш М.Д. Сопротивление пластины с продольными пазами и ребрами // Снижение вязкостного трения. М.: Машиностроение, 1984. С. 189-206.

3. *Eckert E. R. G., Irvine T. F. Jr.* Flow in corners of passages with noncircular cross section // *Trans. ASME.* 1956. V. 78, N 4. P. 709-718.

4. *Jonsson V. K., Sparrow E. M.* Experiments on turbulent-flow phenomena in eccentric annular ducts // *J. Fluid Mech.* 1966. V. 25. Pt. 1. P. 65-86.

5. *Вулис Л.А., Кашикарров В.П.* Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965. 431 с.

6. *Чуркина О.И.* Об одном автомодельном решении уравнений ламинарного пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости // *Мат. межд. научно-техн. конф. «Достиж. науки в обл. строит. механики и инж. сооруж.»*. Алматы, 2005. Т. 2. С. 93-97.

7. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 547 с.

### Резюме

Бұл жұмыста сығылмайтын тұтқыр сұйықтың екі жақты бұрыш арқылы өтетін ағысының автомодельдік шешімі алынған.

### Summary

It was obtained a similar solution of problem of a laminar boundary layer flow in the corner.

*КазАТК им. М. Тынышпаева,*  
*г. Алматы*

*Поступила 23.09.05 г.*