

ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ УПЛОТНЯЕМЫХ ЗЕМЛЯНЫХ МАСС ПРИ ДАВЛЕНИИ, ЗАВИСЯЩЕМ ОТ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ

В работе получено решение трехмерной задачи консолидации грунтов при давлении, зависящем от коэффициента фильтрации.

В данной работе рассматривается процесс трехмерного уплотнения многофазных грунтов, обладающих упругим свойством, когда коэффициент их фильтрации изменяется по величине в зависимости от давления в поровой жидкости. При этом уравнение уплотнения трехфазного грунта будет иметь вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \beta'(1 + \varepsilon_{cp}) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{(1 + \varepsilon_{cp})}{\gamma} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[k(p) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k(p) \frac{\partial p}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k(p) \frac{\partial p}{\partial z} \right] \right\}, \quad (1)$$

где ε , ε_{cp} – соответственно коэффициент пористости для конечного момента времени и среднее его значение; β' – коэффициент объемного сжатия; γ – объемный вес воды; $k(p)$ – коэффициент фильтрации; p – давление в поровой жидкости и оно зависит от времени и пространственных координат x , y , z .

Для упругой задачи компрессионная зависимость, т.е. зависимость между коэффициентом пористости и суммой главных напряжений, имеет вид

$$\varepsilon(x, y, z, t) = \varepsilon_0 - \frac{a_0(z, t)}{1 + 2\xi} \theta(x, y, z, t), \quad (2)$$

где ε_0 – коэффициент пористости для начального момента времени; $a_0(z, t)$ – коэффициент сжимаемости, который в общем случае зависит от глубины уплотняемого грунтового массива и времени; $\theta(x, y, z, t)$ – сумма главных напряжений в скелете грунта; ξ – коэффициент бокового давления.

Учитывая (2), выражение (1) приводим к виду

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{3\mathcal{A}_0}{3a_0 + \beta'(1 + \varepsilon_{cp})} p = \frac{(1 + \varepsilon_{cp})(1 + 2\xi)}{\gamma[3a_0 + \beta'(1 + \varepsilon_{cp})]} \times \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[K(p) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K(p) \frac{\partial p}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(p) \frac{\partial p}{\partial z} \right] \right\} + \frac{3\mathcal{A}_0}{3a_0 + \beta'(1 + \varepsilon_{cp})} \cdot \left(\frac{\theta^*}{3} + p^* \right). \quad (3)$$

Здесь θ^* , p^* – сумма главных напряжений в скелете грунта и давление в поровой жидкости для стабилизированного его состояния; $\mathcal{A}_0 = \frac{\partial a_0}{\partial t}$.

Нелинейную функцию $K(p)$, входящую в (3), представив в виде полинома, т.е.

$$k(p) = \sum_{j=0}^n k_j \varepsilon^j p^j, \quad (4)$$

где ε – малый параметр, т.е. ($0 \leq \varepsilon \leq 1$); k_j – заданные постоянные.

Используя выражение (4), уравнение (3) получим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{3\alpha_0}{3a_0 + \beta'(1 + \varepsilon_{cp})} p = \\ = C_v^{(3)} \nabla^2 p_0 + \frac{(1 + \varepsilon_{cp})(1 + 2\xi)}{\gamma[3a_0 + \beta'(1 + \varepsilon_{cp})]} \times \\ \times \sum_{i=1}^n \left\{ K_i \varepsilon^i p^{i-1} \cdot \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] + p^i \nabla^2 p_i \right\} + \\ + \frac{3\alpha_0}{3a_0 + \beta'(1 + \varepsilon_{cp})} \left(\frac{\theta^*}{2} + p^* \right), \quad (5) \end{aligned}$$

где $C_v^{(3)} = \frac{k_0(1 + \varepsilon_{cp})(1 + 2\xi)}{\gamma[3a_0 + \beta'(1 + \varepsilon_{cp})]}$; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Решение уравнения (5) представим в виде

$$p(x, y, z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(x, y, z, t) \cdot \varepsilon^i. \quad (6)$$

Выражение (6) подставим в (5), затем в полученном выражении, приравнявая в обеих частях коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε для определения неизвестной функции $p_i(x, y, z, t)$, находим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{3\alpha_0}{3a_0 + \beta'(1 + \varepsilon_{cp})} p_i = C_v^{(3)} \nabla^2 p_0 + \Phi_i, \quad (7)$$

где

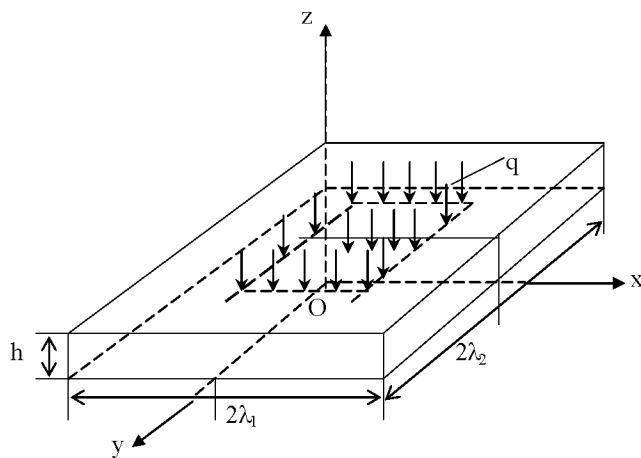
$$\Phi_0 = \frac{3\alpha_0}{3a_0 + \beta'(1 + \varepsilon_{cp})} \cdot \left(\frac{\theta^*}{3} + p^* \right); \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \tilde{C}_v^{(3)} \cdot \left\{ k_1 \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial z} \right)^2 \right] + k_1 p_0 \nabla^2 p_0 \right\}; \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \tilde{C}_v^{(3)} \cdot \left\{ k_1 \left[\left(\frac{\partial p_1}{\partial x} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial p_1}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial p_1}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + 2k_2 p_0 \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p_0}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + k_1 p_1 \nabla^2 p_0 + k_1 p_0 \nabla^2 p_1 + 2k_2 p_0^2 \nabla^2 p_0 \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы определить функцию $p(x, y, z, t)$, отражающую изменение давления в поровой жидкости во времени и координаты, следует находить непрерывные функции $p_i(x, y, z, t)$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (7) при (8)–(10) и соответствующим начальным и граничным условиям исследуемых задач.

Решение трехмерной задачи при постоянном модуле деформации. Рассмотрим процесс уплотнения грунтового массива в виде параллелепипеда с водоупором на глубине h и с водонепроницаемыми сторонами $2^{2|\lambda_1|}$ и $2^{2|\lambda_2|}$, на некоторой части верхней поверхности которого со сторонами $2a$ и $2b$ в некоторый момент времени $t = \tau_1$ приложена равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью q . Расчетная схема данной задачи дана на рисунке.



Для рассматриваемой задачи областью изменения независимых переменных является параллелепипед, образованный плоскостями:

$$x = \pm \lambda_1;$$

$$y = \pm \lambda_2;$$

$$z = 0; \quad z = h.$$

Согласно условию задачи граничными условиями при $t = \tau_1$ будут:

$$\lim_{z \rightarrow h} p(x, y, z) = \left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & q \text{ при } |x| < a, |y| < b \\ & 0 \text{ при } |x| > a, |y| > b \text{ или} \\ & |x| > a, |y| < b \text{ или } |x| < a, |y| > b \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} & \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=\pm\lambda_1} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=\pm\lambda_2} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Кроме них в силу симметрии функция $p(x, y, z)$ должна быть четной относительно x и y в отдельности, т.е.

$$p(x, y, z) = \left\{ \begin{aligned} & p(-x, y, z) \\ & p(x, -y, z) \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Данная задача для начального момента времени, т.е. для случая $t = \tau_1$, решена Я. А. Мачеретом [1]. Оно относительно давления в поровой жидкости имеет вид:

$$P^{(H)}(x, y, z) = q \cdot \left[\frac{ab}{I_1 I_2} + \frac{2b}{I_2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m ch \frac{m\pi}{I_1} z \cos \frac{m\pi}{I_1} x + \frac{2a}{I_2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n ch \frac{n\pi}{I_2} y \cos \frac{n\pi}{I_2} y + 4 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m b_n c_{mn} ch \frac{m\pi}{I_1} h \times \right. \\ \left. \times ch \frac{n\pi}{\lambda_2} h \cdot \cos \frac{m\pi}{\lambda_1} x \cdot \cos \frac{n\pi}{\lambda_2} y \cdot \cos \alpha_{mn} z \right], \quad (13)$$

где $a_m = \frac{\sin \frac{m\pi a}{\lambda_1}}{m\pi \cdot ch \frac{m\pi h}{\lambda_1}}$; $b_n = \frac{\sin \frac{n\pi b}{\lambda_2}}{n\pi \cdot ch \frac{n\pi h}{\lambda_2}}$; $c_{mn}^{-1} = ch \alpha_{mn} h$;

$$\alpha_{mn} = \left[\left(\frac{m\pi}{\lambda_1} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\lambda_2} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Доказательство равномерной сходимости ряда (13) и его производных при $z < h$ не представляет трудности. Этот ряд дает возможность определить давление в поровой жидкости в любой точке рассматриваемого грунтового параллелепипеда в начальный момент времени.

При постоянном модуле деформации уплотняемой среды исследуемая задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \tilde{C}_V^{(3)} \cdot \left(\frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_i}{\partial z^2} \right) + \Phi_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Здесь $\Phi_0 = 0$. Остальные Φ_i находятся из (9) и (10) выражений. При этом для (14) начальными условиями будут:

$$p_0(x, y, z, \tau_1) = p_0^{(H)}(x, y, z), \quad (15)$$

$$p_i(x, y, z, \tau_1) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Граничные условия (11) для момента времени $t > \tau_1$ применительно к указанной расчетной схеме примут вид:

$$\left. \begin{aligned} & p_i(x, y, z) = 0 \text{ при } z = h, \\ & \frac{\partial p_i}{\partial x} \Big|_{x=\pm\lambda_1} = \frac{\partial p_i}{\partial y} \Big|_{y=\pm\lambda_2} = \frac{\partial p_i}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Далее определяются непрерывные функции $p_i(x, y, z, t)$, удовлетворяющие системе уравнений (14) при начальных (15), (16) и граничных (17) условиях, которые дают возможность находить расчетные формулы для вычисления давления в поровой жидкости, суммы главных напряжений в скелете грунта и вертикальных перемещений верхней поверхности уплотняемого массива.

Для случая $i = 0$ это решение можно представить в виде

$$p_0(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{mnk}^{(0)}(t) \cdot e^{-C_V^{(3)} \cdot \lambda_{mnk}^2 (t - \tau_1)} \times \\ \times \cos \frac{m\pi}{\lambda_1} x \cos \frac{n\pi}{\lambda_2} y \cos \frac{(2k+1)\pi}{2h} z, \quad (18)$$

где

$$C_{mnk} = \frac{8}{\lambda_1 \lambda_2} \int_0^{\lambda_1} \int_0^{\lambda_2} \int_0^h p_0^{(H)}(x, y, z) \times \\ \times \left(\cos \frac{m\pi}{\lambda_1} x \cos \frac{n\pi}{\lambda_2} y \cos \frac{(2k+1)\pi}{2h} z \right) dx dy dz.$$

При этом нетрудно убедиться в том, что выражение (18) при $i = 0$ удовлетворяет уравнению (14), начальному (15), граничным (17) условиям.

Зная функцию $p_0(x, y, z, t)$, можно уже перейти к нахождению следующей функции $p_1(x, y, z, t)$. Она имеет вид

$$p_1(x, y, z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau_1}^t Q_{ijk}^{(1)}(\tau) e^{-C_V^{(3)} \cdot \lambda_{ijk}^2 (t-\tau)} \times \\ \times d\tau \left(\cos \frac{i\pi}{\lambda_1} x \cos \frac{j\pi}{\lambda_2} y \cos \frac{(2k+1)\pi}{2h} z \right). \quad (19)$$

Выражение $Q_{ijk}^{(1)}(\tau)$, входящее в (19), вычисляется по формуле

$$Q_{ijk}^{(1)}(\tau) = \frac{8}{\lambda_1 \lambda_2 h} \cdot \int_0^{\lambda_1} \int_0^{\lambda_2} \int_0^h C_V^{(3)} \left\{ k_1 \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial z} \right)^2 \right] + k_1 p_0 \nabla^2 p_0 \right\} \times \\ \times \left(\cos \frac{i\pi}{\lambda_1} x \cos \frac{j\pi}{\lambda_2} y \cos \frac{(2k+1)\pi}{2h} z \right) dx dy dz.$$

Аналогичным методом можно определить и другие последующие функции $p_2(x, y, z, t)$, $p_3(x, y, z, t)$, ..., $p_i(x, y, z, t)$. Однако из-за малости параметра ε можно ограничиваться двумя членами ряда (6).

Тогда поровое давление можно получить в виде

$$p(x, y, z, t) = p_0(x, y, z, t) + p_1(x, y, z, t) \cdot \varepsilon, \quad (20)$$

где функции p_0 и p_1 , входящие в (20), соответственно вычисляются по формулам (18) и (19).

Выражение (20) дает возможность определить сумму главных напряжений в скелете грунта. Для

этого согласно [2] используем соотношение вида

$$\theta = \left(\frac{\theta^*}{3} + p^* \right) - p, \quad (21)$$

где $\left(\frac{\theta^*}{3} + p^* \right)$ имеет вид (13), а p – вид (20). Используя соотношение (21), по формуле

$$S(t, x, y) = \int_0^h \frac{a_0 \theta(t, x, y, z)}{1 + \varepsilon_0} dz$$

вычисляем вертикальные перемещения верхней поверхности уплотняемого массива.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мачерет Я.А. Распределение мгновенных напоров и давлений в грунтовой массе, вызванных мгновенной нагрузкой // Тр. ВИОС. 1934. №4.
2. Флорин В.А. Теория уплотнения земляных масс. М.: Госстройиздат, 1998.
3. Флорин В.А. Расчеты оснований гидротехнических сооружений. М.: Госстройиздат, 1948.

Резюме

Бұл жұмыста топырақ қабатының фильтрация коэффициентінің қысымға байланысты болған кездегі тығыздалуының үш өлшемді есебінің шешімі табылған.

Summary

In this paper is given the solution of three dimensional task of consolidation grounds while pressure depended coefficient of filtration.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова,
г. Шымкент

Поступила 20.01.06 г.

$$\|\lambda^* - \lambda\| \leq \frac{\gamma_v(\rho)}{1 - \varepsilon\gamma_v(\rho)} \|Q_{v,\rho}(\lambda, u^*) - Q_{v,\rho}(\lambda, \rho)\| \leq \frac{\gamma_v(\rho)}{1 - \varepsilon\gamma_v(\rho)} \times \max_{r=1, m+1} \left\{ \int_{t_{r-1}}^{t_r} L(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{v-1}} L(\tau_v) \|u_r^*(\tau_v) - \tilde{u}_r(\tau_v)\| d\tau_v \dots d\tau_1 \right\}. \quad (24)$$

Так как $\|u_r^*(t) - \tilde{u}_r(t)\| \leq \int_{t_{r-1}}^t L(\tau) (\|\lambda_r^* - \tilde{\lambda}_r\| + \|u_r^*(\tau) - \tilde{u}_r(\tau)\|) d\tau$, то в силу леммы Гронуолла–Беллмана

$$\|u_r^*(t) - \tilde{u}_r(t)\| \leq \left(\exp \left(\int_{t_{r-1}}^t L(\tau) d\tau \right) - 1 \right) \|\lambda_r^* - \tilde{\lambda}_r\|. \quad (25)$$

Подставляя (25) в правую часть (24), имеем

$$\|\lambda^* - \lambda\| \leq \frac{q_v(\rho)}{1 - \varepsilon\gamma_v(\rho)} \|\lambda^* - \lambda\|. \quad (26)$$

Таким образом, в силу неравенств (23), (25), (26) имеют место равенства $\lambda_r^* = \tilde{\lambda}_r$, $u_r^*(t) = \tilde{u}_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, m+1}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища шк., 1987. 282 с.

2. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнении. Киев: Наук. думка, 1992. 280 с.

3. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50-66.

4. Джумабаев Д.С. Итерационные процессы с демпфирующими множителями и их применение // Матем. журнал. Алматы, 2001. Т. 1, № 1. С. 30-40.

Резюме

Импульсті түрткілі дифференциалдық тендеулер жүйесі үшін периодты шеттік есеп параметрлеу әдісімен зерттелінді. қарастырылып отырған есептің шешімін табу алгоритмі тұрғызылды. Ұсынылған алгоритмнің жинақтылығының және жеке-шектенген шешімнің болуының жеткілікті шарттары алынды.

Summary

The periodical boundary value problem for system of non-linear differential equations with impulse perturbation is investigated by method parameterization. The algorithm of finding of the considering problems solution. The sufficient conditions of convergence of the proposing algorithm and of existence of isolated solution are obtained.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 09.11.05 г.