УДК 531.31; 519.21

М. И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ, Г. Т. ИБРАЕВА

ОБ ОБРАТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ДИФФУЗИЕЙ

Рассматривается задача восстановления в классе стохастических дифференциальных уравнений первого порядка типа Ито по заданным свойствам движения, когда управление входит: 1) в коэффициент сноса, 2) в коэффициент диффузии и 3) как в коэффициент сноса, так и в коэффициент диффузии. В указанных случаях определяется вид управляющих параметров, обеспечивающий необходимые и достаточные условия существования заданного инте-грального многообразия.

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) [2, 3]. Настоящая работа обобщает результаты [4], где задача восстановления рассмотрена в классе уравнений Ито второго порядка с невырождающейся диффузией.

1. Стохастическая задача с управлением сносу. Пусть задана система стохастических дифференциальных уравнений первого порядка типа Ито:

$$\begin{cases} \dot{y} = f_1\left(y,z,v,w,t\right), \quad y \in R^{l_1}, \\ \dot{z} = f_2\left(y,z,v,w,t\right) + \sigma_1\left(y,z,v,w,t\right)\dot{\xi}, \quad z \in R^{l_2}, \quad \xi \in R^k, \\ \dot{v} = f_3\left(y,z,v,w,t\right) + L_1\left(y,z,v,w,t\right)u_1, \quad v \in R^{p_1}, \\ \dot{w} = f_4\left(y,z,v,w,t\right) + L_2\left(y,z,v,w,t\right)u_2 + \sigma_2(y,z,v,w,t)\dot{\xi}, \\ \quad w \in R^{p_2}, l_1 + l_2 + p_1 + p_2 = n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Требуется определить входящие в коэффициент сноса вектор-функции $u_1 = u_1(y,z,v,w,t) \in R^r$ и $u_2 = u_2\left(y,z,v,w,t\right) \in R^r$ по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t):\ \lambda(y,z,v,w,t) = 0,$$

$$\text{где } \lambda = \lambda(y,z,v,w,t) \in C^{1\,2\,1\,2\,1}_{y\,z\,v\,w\,t}, \ \lambda \in R^m, \quad (1.2)$$

где $C^{1\,2\,1\,2\,1}_{yzvwt}$ обозначает множество функций $\gamma(y,z,v,w,t)$, непрерывно дифференцируемых по y, v и по t и дважды непрерывно дифференцируемых по z, w.

Предполагается, что $f_1, f_2, f_3, f_4, L_1, L_2, \sigma_1, \sigma_2$ принадлежат классу функций ***K***-непрерывных по t и липшицевых по y, z, v и w в окрестности множества $\Lambda(t)$

$$U_h(\Lambda) =$$

$$= \{ y = (y^T, z^T, v^T, w^T)^T : \rho(y, \Lambda(t)) < h, \ h > 0 \}. \quad (1.3)$$

В настоящей работе для решения стохастической задачи восстановления используется метод квазиобращения Мухарлямова [3, с. 12].

Для решения поставленной задачи по правилу стохастического дифференцирования Ито [5, с. 204] составляется уравнение возмущенного движения

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} f_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial z} f_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial v} f_3 + \frac{\partial\lambda}{\partial w} f_4 + \frac{\partial\lambda}{\partial v} L_1 u_1 +$$

$$+ \frac{\partial\lambda}{\partial v} L_2 u_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\sigma_1 \dot{\xi} + \frac{\partial\lambda}{\partial w}\sigma_2 \dot{\xi} + S_1 + S_2, \quad (1.4)$$

где $S_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\lambda}{\partial z} : \sigma_1\sigma_1^T$; $S_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\lambda}{\partial w} : \sigma_2\sigma_2^T$, а под $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\lambda}{\partial z} : D_1$, $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\lambda}{\partial w} : D_2$, следуя [5], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(y,z,v,w,t)$ вектора $\lambda(y,z,v,w,t)$ по компонентам z, w на матрицы D_1, D_2, где $D_1 = \sigma_1\sigma_1^T, D_2 = \sigma_2\sigma_2^T$.

Введем произвольные функции Еругина [1]: m-мерную вектор-функцию A и $(m \times k)$ матрицу B, обладающие свойством $A(0,y,z,v,w,t) \equiv 0$, $B(0,y,z,v,w,t) \equiv 0$, такие, что имеет место

$$\dot{\lambda} = A(\lambda,y,z,v,w,t) + B(\lambda,y,z,v,w,t)\dot{\xi}, \quad (1.5)$$

где x – тот же независимый винеровский процесс, входящий в (1.1). На основе уравнений (1.4) и (1.5) приходим к соотношениям

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} L_1 u_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial w} L_2 u_2 = \quad (1.6)$$

$$= A - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} f_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial z} f_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial v} f_3 + \frac{\partial\lambda}{\partial w} f_4 + S_1 + S_2 \right),$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z}\sigma_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial w}\sigma_2 = B, \quad (1.7)$$

из которых нужно определить управления u_1, u_2. Для разрешения задачи потребуется

Лемма 1 [3, с. 12-13]. *Совокупность всех решений линейной системы*

$$H\vartheta = g, \quad H = \left(h_{\mu k}\right), \quad \vartheta = (\vartheta_k), \quad g = (g_\mu),$$

$$\mu = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,n}, \quad m \le n, \quad (1.8)$$

где матрица H имеет ранг, равный m, определяется выражением

$$\vartheta = s\left[H\,C\right] + H^+ g. \quad (1.9)$$

Здесь s-произвольная скалярная величина, $\left[H\,C\right] = \left[h_1 \ldots h_m\ c_{m+1} \ldots c_{n-1}\right]$ есть векторное произве-дение векторов $h_\mu = \left(h_{\mu k}\right)$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; $H^+ = H^T\left(HH^T\right)^{-1}$, H^T – матрица, транспонированная к H.

Положим $u_1 = g\,(y,z,v,w,t)$, где g – произвольная функция из класса K.

Обозначив $\widetilde{L} = \dfrac{\partial\lambda}{\partial w} L_2$, по формуле (1.9) леммы 1 из соотношений (1.6), (1.7) определим искомые вектор-функцию u_2 и матрицу σ_2 в виде

$$u_2 = s_1\left[\widetilde{L}C\right] + \left(\widetilde{L}\right)^+ \left[A - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} f_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial z} f_2 + \right.\right.$$

$$+\frac{\partial\lambda}{\partial v}f_3+\frac{\partial\lambda}{\partial w}f_4+S_1+S_2\Big)-\frac{\partial\lambda}{\partial v}L_1 g\Big], \qquad (1.10)$$

$$\sigma_{2i}=s_2\left[\frac{\partial\lambda}{\partial w}C\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial w}\right)^+\widetilde{B}_i. \qquad (1.11)$$

где σ_{2i} – i-й столбец матрицы $\sigma_2=\left(\sigma_{2\nu j}\right)(\nu=\overline{1\ldots n})$, $\left(j=\overline{1\ldots k}\right)$; $\widetilde{B}_i$ – i-й столбец матрицы $\widetilde{B}=\left(\widetilde{B}_{\mu l}\right)$.

Следовательно, справедлива теорема:

Теорема 1. *Для того чтобы дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито (1.1) имело заданное интегральное многообразие (1.2), необходимо и достаточно, чтобы при произвольно заданном управлении $u_1=g(y,z,v,w,t)\in K$ управляющая функция u_2 имела вид (1.10), а матрицы диффузий σ_2 и σ_4 удовлетворяли условию (1.11).*

Замечание 1.1. Если $l_1=p_2=\dfrac{n}{2}$, $l_2\equiv p_1\equiv 0$, то данная задача сводится к ранее рассмотренной в [4] стохастической задаче восстановления уравнения Ито второго порядка.

2. Линейный случай стохастической задачи с управлением по сносу. По заданному линейному по сносу стохастическому дифференциальному урав-нению первого порядка типа Ито:

$$\begin{cases}\dot y=D_1(t)y+D_2(t)z+D_3(t)v+D_4(t)w+d(t),\\ \dot z=C_1(t)y+C_2(t)z+C_3(t)v+C_4(t)w+c(t)+\sigma_1(t)\dot\xi,\\ \dot v=F_1(t)y+F_2(t)z+F_3(t)v+F_4(t)w+F_5u_1+f(t),\\ \dot w=G_1(t)y+G_2(t)z+G_3(t)v+G_4(t)w+G_5u_2+g(t)+\sigma_2(t)\dot\xi\end{cases} \qquad (2.1)$$

требуется определить вектор-функции управления $u_1=u(y,z,v,w,t)$ и $u_2=u(y,z,v,w,t)\in R^r$ по заданному линейному интегральному многообразию

$$\Lambda(t):\quad \lambda\equiv H_1y+H_2z+H_3v+H_4w+h(t)=0. \qquad (2.2)$$

В рассматриваемой задаче уравнение возмущенного движения (1.4) имеет вид

$$\dot\lambda=E_1(t)y+E_2(t)z+E_3(t)v+E_4(t)w+E_5(t)+ \qquad (2.3)$$
$$+H_3(t)F_5(t)u_1+H_4(t)G_5(t)u_2+H_2(t)\sigma_1\dot\xi+H_4(t)\sigma_2\dot\xi,$$

где

$$E_1(t)=H_1(t)D_1(t)+H_2(t)C_1(t)+H_3(t)F_1(t)+$$
$$+H_4(t)G_1(t)+\dot H_1(t),$$
$$E_2(t)=H_1(t)D_2(t)+H_2(t)C_2(t)+H_3(t)F_2(t)+$$
$$+H_4(t)G_2(t)+\dot H_2(t),$$
$$E_3(t)=H_1(t)D_3(t)+H_2(t)C_3(t)+H_3(t)F_3(t)+$$
$$+H_4(t)G_3(t)+\dot H_3(t),$$
$$E_4(t)=H_1(t)D_4(t)+H_2(t)C_4(t)+H_3(t)F_4(t)+$$
$$+H_4(t)G_4(t)+\dot H_4(t),$$
$$E_5(t)=H_1(t)d(t)+H_2(t)c(t)+H_3(t)f(t)+H_4(t)g(t)+\dot h(t),$$

а, с другой стороны, с помощью произвольной вектор-функции Еругина $A=A_1(t)\lambda$ и матрицы-функции B_1 со свойством $B_1(0,y,z,v,w,t)\equiv 0$ имеем

$$\dot\lambda=A_1(t)\lambda+B_1(\lambda,y,z,v,w,t)\dot\xi. \qquad (2.4)$$

Отсюда из соотношений (2.4) и (2.5) следуют равенства:

$$\begin{cases}H_3(t)F_5(t)u_1+H_4(t)G_5(t)u_2 \quad [A_1H_1-E_1]y+[A_1H_2-E_2]z+\\ [A_1H_3-E_3]v+[A_1H_4-E_4]w+[A_1h(t)-E_5(t)],\\ H_2\sigma_1+H_4\sigma_2=B.\end{cases} \qquad (2.5)$$

Положим $u_1=q(y,z,v,w,t)$, где $q\in K$. Тогда из равенств (2.5) с использованием леммы 1 имеем

$$u_2=s_1\left[\widetilde{D}C\right]+\left(\widetilde{D}\right)^+d_1, \qquad (2.6)$$

$$\sigma_{2i}=s_2\left[H_4C\right]+\left(H_4\right)^+\widetilde{B}_i, \qquad (2.7)$$

где $\widetilde{D}$ и d_1 имеют соответственно вид $\widetilde{D}=H_4(t)G_5(t)$ $\quad d_1=[A_1H_1-E_1]y+[A_1H_2-E_2]z+[A_1H_3-E_3]v+$
$+[A_1H_4-E_4]w+[A_1h(t)-E_5(t)]-H_3(t)F_5(t)q$,

$\widetilde{B}=B-H_2\sigma_1$, а через σ_{2i}, $\widetilde{B}_i$ обозначены соответственно i-е столбцы матриц σ и $\widetilde{B}$. Здесь s_1, s_2 – произвольные скалярные величины. Тем самым доказана

Теорема 2. *Для того чтобы стохастическое линейное по сносу дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито* (2.1) *имело заданное линейное интегральное многообразие* (2.2), *необходимо и достаточно, чтобы при произвольно заданной $u_1\equiv q$, $q\in K$ управляющий параметр u_2 имел вид* (2.6), *а матрицы диффузий σ_1 и σ_2 удовлетворяли условию* (2.7).

Замечание 2.1. При $l_1\equiv p_2=\dfrac{n}{2}, l_2\equiv p_1=0$ условия разрешимости теоремы 2 совпадают с условиями разрешимости в [4] , где рассмотрена стохастическая задача восстановления уравнения второго порядка.

3. Стохастическая задача восстановления с управлением по диффузии. Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито:

$$\begin{cases} \dot{y} = L_1(y,z,v,w,t), \\ \dot{z} = L_2(y,z,v,w,t) + T_1(t)\dot{\xi}, \\ \dot{v} = L_3(y,z,v,w,t)\ , \\ \dot{w} = L_4(y,z,v,w,t) + T_2(t)\dot{\xi}. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Требуется определить матрицы диффузий T_1, T_2 по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t): \lambda(y,z,v,w,t) = 0,$$

где $\lambda = \lambda(y,z,v,w,t) \in C^{12121}_{yzvwt}, \quad \lambda \in R^m$. (3.2)

По правилу стохастического дифференцирования Ито [5, с. 204] составляется уравнение возмущенного движения:

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}L_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial z}L_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial v}L_3 + \frac{\partial\lambda}{\partial w}L_4 + \frac{\partial\lambda}{\partial z}T_1\dot{\xi} +$$

$$+ \frac{\partial\lambda}{\partial w}T_2\dot{\xi} + S_1 + S_2, \qquad (3.3)$$

где $S_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial z} : T_1T_1^T\right]; \qquad S_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial w} : T_2T_2^T\right].$

Введем произвольные функции типа Еругина [1]: m-мерную вектор- функцию A_2 и $(m \times k)$-матрицу B_2, обладающие свойством $A_2(0,y,z,v,w,t) \equiv 0$, $B_2(0,y,z,v,w,t) \equiv 0$, при этом имеет место равенство

$$\dot{\lambda} = A_2(\lambda,y,z,v,w,t) + B_2(\lambda,y,z,v,w,t)\dot{\xi}. \qquad (3.4)$$

Из уравнений (3.3) и (3.4) следуют соотношения:

$$M + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial w} : T_2T_2^T\right] = A_2, \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z}T_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial w}T_2 = B_2, \qquad (3.6)$$

из которых требуется определить T_1, T_2, где

$$M = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}L_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial z}L_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial v}L_3 + \frac{\partial\lambda}{\partial w}L_4 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial z} : T_1T_1^T\right].$$

Положим что $T_1 = T$, где T – произвольная матрица с элементами из класса K. Тогда из уравнения (3.6) в силу формулы (1.9) леммы 1 определим общий вид искомой матрицы T_2:

$$T_{2i} = s_1\left[\frac{\partial\lambda}{\partial w}C\right] + \left[\frac{\partial\lambda}{\partial w}\right]^+ \hat{B}_i, \qquad (3.7)$$

где $\hat{B} = B_2 - \frac{\partial\lambda}{\partial z}T$. Соотношение (3.5) является дополнительным условием на матрицу T_2. Здесь T_{2i} = – i-й столбец матрицы $W = (w_{\nu j})$, $(\nu = \overline{1,n},\ j = \overline{1,k})$; $B_{2i} = (B_{21i}, B_{22i}, \ldots, B_{2ri})^T$ – i-й столбец матрицы $B = (B_{2\mu l})$, $(\mu = \overline{1,m},\ l = \overline{1,k})$.

Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Для того чтобы дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито* (3.1) *имело заданное интегральное многообразие* (3.2), *необ-ходимо и достаточно, чтобы* $T_1 = T, T \in K$ *и уп-равляющая матрица диффузий* T_2 *имела вид* (3.7), *а коэффициенты уравнения удовлетворяли условию* (3.5).

4. Стохастическая задача восстановления с управлениями по сносу и диффузии. Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито:

$$\begin{cases} \dot{y} = C_1(y,z,v,w,t), \\ \dot{z} = C_2(y,z,v,w,t) + Q_1(t)\dot{\xi}, \\ \dot{v} = C_3(y,z,v,w,t)\ + D_1u_1, \\ \dot{w} = C_4(y,z,v,w,t) + D_2u_2 + Q_2(t)\dot{\xi}. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Требуется определить r-мерную вектор-функцию $u_2 = u_2(y,z,v,w,t)$ и $(n \times k)$-матрицу Q_2 по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t): \lambda(y,z,v,w,t) = 0,$$

где $\lambda = \lambda(y,z,v,w,t) \in C^{12121}_{yzvwt}, \quad \lambda \in R^m$. (4.2)

По правилу дифференцирования Ито в случае процессов с независимыми приращениями [4, с. 204] составляется уравнение возмущенного движения

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}C_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial z}C_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial z}Q_1\dot{\xi} + \frac{\partial\lambda}{\partial v}C_3 + \frac{\partial\lambda}{\partial v}D_1u_1 +$$

$$+ \frac{\partial\lambda}{\partial w}C_4 + \frac{\partial\lambda}{\partial w}D_2u_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial w}Q_2\dot{\xi} + S_1 + S_2, \qquad (4.3)$$

где $S_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial z} : Q_1Q_1^T\right]; \ S_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial w} : Q_2Q_2^T\right].$

Введем произвольные функции типа Еругина [1]: $A_3(\lambda,y,z,v,w,t)$, $B_3(\lambda,y,z,v,w,t)$, обладающие свойством $A_3(0,y,z,v,w,t) \equiv 0$, $B_3(0,y,z,v,w,t) \equiv 0$, причем

$$\dot\lambda = A_3(\lambda, y, z, v, w, t) + B_3(\lambda, y, z, v, w, t)\dot\xi, \quad (4.4)$$

где x – винеровский процесс. Из уравнений (4.3) и (4.4) следуют соотношения:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial w}D_2u_2 = A_3 - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}C_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial z}C_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial v}C_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\lambda}{\partial v}D_1u_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial w}C_4 + S_1 + S_2\right), \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial w}Q_2 = B_3 - \frac{\partial\lambda}{\partial z}Q_1. \quad (4.6)$$

из которых требуется определить вектор-функцию управления u_2 и матрицу Q_2 так, чтобы множество (4.2) являлось интегральным множеством уравнения (4.1).

Согласно формуле (1.9) леммы 1 имеем:

$$u_2 = s_1\left[\widetilde{D}C\right] + \left(\widetilde{D}\right)^+ d_1, \quad (4.7)$$

$$Q_{2i} = s_2\left[\frac{\partial\lambda}{\partial w}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial w}\right)^+ \hat{B}_{3i}, \quad (4.8)$$

где $d_1 = A_3 - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}C_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial z}C_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial v}C_3 + \frac{\partial\lambda}{\partial v}D_1u_1 + \right.$

$\left. + \frac{\partial\lambda}{\partial w}C_4 + S_1 + S_2\right)$, $\widetilde{D} = \frac{\partial\lambda}{\partial w}D_2$, $\hat{B}_3 = B_3 - \frac{\partial\lambda}{\partial z}Q_1$.

Следовательно, справедлива

Теорема 4. *Для того чтобы дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито* (4.1) *имело заданное интегральное многообразие* (4.2), *необходимо и достаточно, чтобы управляющая функция* u_2 *имела вид* (4.7), *а матрица диффузий Q-вид* (4.8).

5. Скалярный случай задачи восстановления с управлениями по сносу и диффузии. Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито

$$\ddot x = f_2(x,\dot x,t) + \gamma_1(x,\dot x,t)u_1 + [\gamma(x,\dot x,t) + \gamma_2(x,\dot x,t)u_2]\dot\xi. \quad (5.1)$$

Требуется определить скалярные функции $u_1 = u_1(x,\dot x,t)$ и $u_2 = u_2(x,\dot x,t)$ по заданному интегральному многообразию

$$\lambda_2(x,\dot x,t) = 0, \quad \lambda_2 \in R^1. \quad (5.2)$$

По правилу стохастического дифференцирования составим уравнение возмущенного движения

$$\dot\lambda_2 = \frac{\partial\lambda_2}{\partial t} + \frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\dot x + \frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot x}f_2 + \frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot x}\gamma_1u_1 +$$

$$+ S + \frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot x}(\gamma + \gamma_2u_2)\dot\xi_0, \quad (5.3)$$

где $S = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial\dot x^2}(\gamma + \gamma_2u_2)^2$.

Введем произвольные скалярные функции Н. П. Еругина $a_2 = a_2(\lambda_2, x, \dot x, t)$ и $b_2 = b_2(\lambda_2, x, \dot x, t)$, обладающие свойством $a_2(0, x, \dot x, t) \equiv b_2(0, x, \dot x, t) \equiv 0$, такие, что имеет место

$$\dot\lambda_2 = a_2(\lambda_2, x, \dot x, t) + b_2(\lambda_2, x, \dot x, t)\dot\xi. \quad (5.4)$$

Далее, исходя из уравнений (5.3) и (5.4), приходим к соотношениям

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\gamma_1u_1 = a_2 - \frac{\partial\lambda_2}{\partial t} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\dot x - \frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot x}f_2 - S, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\gamma_2u_2 = b_2 - \frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\gamma. \quad (5.6)$$

Тогда управляющие параметры u_1 и u_2 в силу равенств (5.5) и (5.6) определим в виде

$$u_1 = \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot x}\gamma_1\right)^{-1} \times$$

$$\times \left[a_2 - \frac{\partial\lambda_2}{\partial t} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\dot x - \frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot x}f_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial\dot x^2}(\gamma + \gamma_2u_2)^2\right], \quad (5.7)$$

$$u_2 = \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot x}\gamma_2\right)^{-1}\left(b_2 - \frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot x}\gamma\right). \quad (5.8)$$

Или с учетом (5.8) соотношение (5.7) эквивалентно условию

$$u_1 = \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot x}\gamma_1\right)^{-1}\left[a_2 - \frac{\partial\lambda_2}{\partial t} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\dot x - \frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot x}f_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial\dot x^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\gamma + \gamma_2\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot x}\gamma_2\right)^{-1}\left(b_2 - \frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot x}\gamma\right)\right]^{-1}\right]. \quad (5.9)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 5. *Для того чтобы скалярное дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито* (5.1) *имело заданное скалярное интегральное многообразие* (5.2), *необходимо и достаточно, чтобы управляющие параметры* u_1 *и* u_2 *имели соответственно вид* (5.9) и (5.8).

Итак, получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи восстановления с вырождающейся по части переменных диффузией в общем нелинейном и линейном случаях. Рассмотренная постановка обобщает ранее исследованную в [4] задачу восстановления при случайных возмущениях из класса независимых винеровских процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. 1952. Т. 10, вып.16. С. 659-670.

2. *Галиуллин А.С.* Методы решения обратных задач динамики. М., 1986. 224 с.

3. *Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г.* Уравнения программных движений. М., 1986. 88 с.

4. *Тлеубергенов М.И.* Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. М., 2001. Т. 37, № 5. С. 714-716.

5. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 632 с.

Резюме

1) Көшіру коэффициентіне, 2) диффузия коэффициентіне, 3) көшіру және диффузия коэффициентеріне басқару кіретін кездерде берілген қасиеттері бойынша Ито типтес екінші ретті стохастикалық дифференциалды теңдеулер класында үш қалпына келтіру есебі қарастырылады. Бұл есептерде берілген интегралды көпбейненің бар болуының қажетті және жеткілікті шартарын қамтамасыз ететін басқару параметрдің түрі анықталады.

Summary

Three positings of restriction’s problem into the class of stochastic differential Ito’s equations of second order by given properties of motion are considered when the control contains: 1) in the coefficient of drift, 2) in the coefficient of diffusion, and 3) as in the coefficient of drift as in the coefficient of diffusion. The form of control parameters, which ensures the necessary and sufficient conditions of existence of given integral manifold is defined in these problems.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 06.09.05 г.

УДК 517.9