УДК 530.12

М. М. АБДИЛЬДИН, М. Е. АБИШЕВ

АНАЛОГИЯ МЕЖДУ УРАВНЕНИЕМ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В ОТО И ПЕРВОЙ ПАРОЙ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В работе показано, что уравнение вращательного движения пробного тела в задаче Лензе–Тирринга можно получить с помощью гидродинамической формулы из выражения для ускорения пробного тела. Показано, что имеется аналогия между уравнением вращательного движения тел в ОТО и первой парой уравнений Максвелла.

Обратимся к известной в механике ОТО задаче Лензе–Тирринга, т.е. к задаче о движении пробного тела (с массой m) в поле вращающегося массивного тела (с массой m_0). При этом в отличие от традиционных подходов мы будем рассматривать не только вопрос о поступательном движении пробного тела, но и вопрос об его вращательном движении.

В качестве уравнения вращательного движения пробного тела, описывающего его собственное вращение, возьмем уравнение вращательного движения Брумберга [1, с. 164]:

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{9\gamma m_0}{2c^2r^5}(\vec{r}\vec{v})[\vec{v}\vec{r}] + \frac{\gamma}{c^2}\left\{\frac{3I_0}{r^5}\vec{\omega}_0(\vec{r}\vec{v}) + \frac{3I_0}{r^5}\vec{v}(\vec{r}\vec{\omega}_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{3I_0}{r^5}\vec{r}(\vec{v}\vec{\omega}_0) - \frac{-15I_0}{r^7}\vec{r}(\vec{r}\vec{v})(\vec{r}\vec{\omega}_0)\right\}, \qquad (1)$$

где $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_0$ – угловые скорости пробного тела и массивного тела, I_0 – момент инерции массивного тела.

Помня, что

$$\vec{U} = \frac{\gamma}{2r^3}[\vec{S}_0\vec{r}], \quad \mathrm{rot}\,\vec{U} = \frac{\gamma}{2}\left(-\frac{\vec{S}_0}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{r}\vec{S}_0)}{r^5}\right),$$

$$\vec{U}_M = \frac{\gamma}{2r^3}[\vec{M}\vec{r}], \quad \mathrm{rot}\,\vec{U}_M = \frac{\gamma\vec{M}}{2r^3}, \qquad (2)$$

уравнение вращательного (1) движения приводим к виду

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{3m_0}{mc^2}\mathrm{rot}\,\vec{U}_M + \frac{2}{c^2}\mathrm{rot}\vec{U}\right). \qquad (3)$$

Здесь $\vec{S}_0$ – угловой момент массивного тела.

Далее, в задаче Лензе–Тирринга [1, с. 16]

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{P}} = \vec{V} = \frac{\vec{P}}{m} - \frac{3U\vec{P}}{mc^2} - \frac{P^2\vec{P}}{2m^3c^2} + \frac{4\vec{U}}{c^2}. \qquad (4)$$

Возьмем операцию **rot** с обеих частей этого выражения. Тогда

$$\mathrm{rot}\,\vec{V} = \frac{3\gamma m_0}{mc^2r^3}\vec{M} + \frac{4}{c^2}\mathrm{rot}\,\vec{U} =$$

$$= -\frac{6m_0}{mc^2}\mathrm{rot}\,\vec{U}_M + \frac{4}{c^2}\mathrm{rot}\,\vec{U}. \qquad (5)$$

Подставляя это выражение в (3), находим, что

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\vec{V}. \quad (6)$$

Это хорошо известная из гидродинамики теорема Эйлера. Это значит, что релятивистское уравнение вращательного движения Брумберга (1) равносильно утверждению простой истины о том, что в случае известной задачи Лензе–Тирринга механики ОТО вопрос о собственном вращении решается очень просто с помощью гидродинамической формулы (теоремы Эйлера!) (6). При этом нет необходимости в самом релятивистском уравнении вращательного движения (1).

Итак, делаем первый главный вывод: простая гидродинамическая формула (6) является решением (первым интегралом) релятивистского уравнения вращательного движения в случае задачи Лензе-Тирринга.

Далее, составим выражение для ускорения пробного тела $\dot{\vec{V}}$. Оно, если воспользоваться соотношением (4), имеет вид

$$\dot{\vec{V}} = \left(1 - \frac{3U + \frac{P^2}{2m^2}}{c^2}\right)\frac{\dot{\vec{P}}}{m} - \frac{\vec{P}}{mc^2}\frac{d}{dt}\left(3U + \frac{P^2}{2m^2}\right) + \frac{4}{c^2}\frac{d\vec{U}}{dt}, \quad (7)$$

где [1, с. 16]

$$\dot{\vec{P}} = -\frac{\gamma m m_0}{r^3}\vec{r} - \frac{mU}{c^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{3P^2}{2mc^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - \frac{4}{c^2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\vec{P}\vec{U}\right). \quad (8)$$

Беря **rot** с обеих частей (7), находим

$$\frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\dot{\vec{V}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (9)$$

Отсюда можно сделать второй вывод: уравнение вращательного движения пробного тела, движущегося в поле вращающегося массивного тела, есть следствие уравнения его поступательного движения. Самостоятельный вывод уравнения вращательного движения в случае рассматриваемой задачи является излишним.

Соотношения (6) и (9) позволяют ввести следующий, своеобразный подход к проблеме движения пробного тела в задаче Лензе–Тирринга. Опишем движение с помощью двух векторов: ускорения поступательного движения (полярный вектор!) и угловой скорости вращательного движения (аксиальный вектор!). Тогда они удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\dot{\vec{V}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \\ \mathrm{div}\,\vec{\omega} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Выпишем теперь первую пару уравнений Максвелла в электродинамике

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \mathrm{div}\,\vec{H} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Выражения (10) и (11) показывают наличие своеобразной аналогии между уравнением вращательного движения тел в ОТО и первой парой уравнений Максвелла в электродинамике. Соотношение (5) указывает, что «спин» в механике ОТО является релятивистским эффектом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абдильдин М.М.* Механика теории гравитации Эйнштейна. Алма-Ата, 1988. 198 с.

Резюме

Лензе-Тирринг есебі үшін айналмалы қозғалыс теңдеуін сынақ денесінің үдеуіне гидродинамикалық формуланы қолдану арқылы алуға болатындығы көрсетілген. Осы есеп үшін сынақ денесінің үдеуі мен бұрыштық жылдамдығы Максвелл теңдеулерінің бірінші жұбына ұқсас теңдеулерді қанағаттандыратындығы көрсетілген.

Summary

In the work probe particle rotation motion equation in the Lense–Tirring task had been obtained from acceleration of probe particle by using hydrodynamics formulae. It is appeared, that takes place analogy between rotation motion equation in GR and first pair of Maxwell's equations.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Поступила 20.01.06г.