УДК 523.112

Ф. Б. БЕЛИСАРОВА, К. Р. МЫРЗАКУЛОВ, К. К. ЕРЖАНОВ, К. Х. ЖУНУСОВ, Р. МЫРЗАКУЛОВ

О КОСМОЛОГИЧЕСКИХ БРАНАХ В ПЯТИМЕРНОМ БАЛКЕ

Изучается космологическая модель 3-браны в пятимерном пространстве-времени с космологической постоянной. Представлены некоторые простые решения соответствующего уравнения Эйнштейна. Эти решения содержат одну или несколько произвольных функций.

1. Введение. В последние годы активно развиваются теории, основанные на представлении "мира на бране", в которых подразумевается локализация обычного вещества (за исключением, может быть, гравитонов и других гипотетических частиц, очень слабо взаимодействующих с веществом) на трехмерном многообразии – бране, вложенном в объемлющее многомерное пространство*. В этих теориях, в отличие от теории Калуцы–Клейна, дополнительные измерения могут иметь большой или даже бесконечно большой размер и приводить к экспериментально наблюдаемым эффектам. В данной работе, основываясь на представлении "мира на бране", мы рассматриваем модель, описывающую трехмерную брану, вложенную в пятимерное объемлющее пространство-время, называемое балком. Рассматриваемая нами модель имеет космологическую природу. При этом наша Вселенная отождествляется с 3-браной. В рамках данного подхода рассматриваются различные точные решения соответствующего пятимерного уравнения Эйнштейна (УЭ).

2. Модель. Рассмотрим модель, заданную следующим действием.

$$S = \int d^5x\sqrt{-g}\left(M^3R - \Lambda_5 + L_B^{mat}\right) + \int d^4x\sqrt{-\hat{g}}(-V + L_b^{mat}), \qquad (1)$$

где R является скалярной кривизной 5-мерной метрики g_{AB}, $A, B = 0, 1, \ldots, 5$; ${}_5\,\Lambda_5$ есть космологическая постоянная балка и $\hat{g}_{\alpha\beta}$, с α, $\beta = 0, 1, \ldots, 3$, индуцированная метрика на 3-бран. Мы примем $(x,y) = (x,-z)$, где $z \equiv x_5$. Величина V включает натяжение браны, а также возможные квантовые вклады к 4-мерной космологической постоянной. Для пятимерного пространства-времени соответствующее УЭ имеет следующий вид:

$$G_{AB} \equiv R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB} = \kappa^2 T_{AB}, \qquad (2)$$

где T_{AB} является тензором полной энергии-импульса, R_{AB} – это пятимерный тензор Риччи, $R = g^{AB}R_{AB}$ есть скалярная кривизна. Постоянная κ связана с пятимерной постоянной Ньютона $G_{(5)}$ и пятимерной редуцированной массой Планка $M_{(5)}$ согласно формуле $\kappa^2 = 8\pi G_{(5)} = M_{(5)}^{-3}$.

3. Пятимерное уравнение Эйнштейна. Так как нас интересует космологическое решение УЭ, то метрику ищем в виде

$$ds^2 = -n^2(\tau, y)d\tau^2 + a^2(\tau, y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2(\tau, y)dy^2, \qquad (3)$$

где γ_{ij} – максимально симметричная трехмерная метрика, $k = -1, 0, 1$ параметризует пространственную кривизну.

Тензор энергии-момента можно разложить на две составляющие

$$T^A{}_B = T^A{}_B\big|_{bulk} + T^A{}_B\big|_{brane}. \qquad (4)$$

Здесь $T^A{}_B\big|_{bulk}$ есть тензор энергии-импульса материи на балке, который, как предполагается, имеет следующий вид: $T^A{}_B\big|_{bulk} = diag(-\rho_B, P_B, P_B, P_B, P_T)$, где плотность энергии ρ_B и давления P_B и P_T не зависят от координаты y. В тоже время величина $T^A{}_B\big|_{brane}$ характеризует материю, содержащуюся в бране (то есть для случая $y = 0$). Здесь мы рассматриваем однородную и изотропную геометрию внутри браны. В этом случае можно полагать что

**Binetruy P., Deffayet C., Ellwanger U., Langlois D.* Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant // Phys. Lett. B477. (2000). 285-291.

$T^A{}_B\Big|_{brane} = \frac{\delta(y)}{b} diag(-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0)$, где плотность ρ_b и давление p_b не зависят от месторасположения внутри браны, то есть это функции только времени. Пусть $T_{05} = 0$. Тогда УЭ для (0,0) и (5,5) компонентов можно переписать в следующей более простой форме:

$$F' = \frac{2a'a^3}{3}\kappa^2 \breve{T}^0{}_0, \quad \dot{F} = \frac{2\dot{a}a^3}{3}\kappa^2 \breve{T}^5{}_5, \qquad (5)$$

где F задается формулой $F(\tau, y) \equiv \frac{(a'a)^2}{b^2} - \frac{(\dot{a}a)^2}{n^2} - ka^2$. Поскольку $\breve{T}^0{}_0 = -\rho_B$, не зависит от y, мы можем интегрировать первое уравнение (5), в результате получим $F + \frac{\kappa^2}{6}a^4\rho_B + C = 0$. Здесь C – константа интегрирования, связанная с начальными условиями масштабного фактора. При $T_0^0 = T_5^5$ из системы (5) следует, что $\dot{\rho}_B = \dot{C} = 0$.

4. Редуцированные уравнения. Ниже мы рассмотрим ряд частных решений УЭ, имеющих приложения в космологии. Прежде всего заметим, любые функции a, b, n, удовлетворяющие уравнениям

$$\left(\frac{\dot{a}}{an}\right)^2 - \left(\frac{a'}{ab}\right)^2 = \frac{1}{6}\kappa^2\rho_B - \frac{k}{a^2} + \frac{C}{a^4},$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{n}\right)' = \frac{a'\dot{b}}{bn}, \qquad (6)$$

являются также решениями УЭ (2). Точнее, это справедливо, если источником балка является только космологическая постоянная.

i). Найдем решения системы (6) при калибровке $n = 1$. Тогда из (6) получим

$$b = C_1(y)a', \quad \dot{a}^2 = \frac{1}{6}\kappa^2\rho_B a^2 - k \;\; + C_1^{-2} + \frac{C}{a^2} \qquad (7)$$

или

$$E_\tau = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\kappa^2\rho_B E^2 + 4(C_1^{-2} - k)E + 4C} =$$

$$= \pm\sqrt{\alpha_2 E^2 + \alpha_1 E + \alpha_0}. \qquad (8)$$

В зависимости от знака детерминанта $\Delta = 4\alpha_2\alpha_0 - \alpha_1^2$ это уравнение имеет три различных решения, которые мы здесь не приводим.

ii). Еще один класс решений УЭ получаем, если от двух независимых переменных y, t перейдем к одной переменной $\xi = \lambda(y - v\tau)$. При этом система (6) примет вид

$$\lambda^2 v^2\left(\frac{a_\xi}{an}\right)^2 - \lambda^2\left(\frac{a_\xi}{ab}\right)^2 = \frac{1}{6}\kappa^2\rho_B - \frac{k}{a^2} + \frac{C}{a^4},$$

$$\left(\frac{a_\xi}{n}\right)_\xi = \frac{a_\xi b_\xi}{bn}. \qquad (9)$$

Отсюда имеем

$$[(a^2)_\xi]^2 = \left(\frac{2n}{\lambda v}\right)^2\left(\frac{\lambda^2}{C_3{}^2}a^2n^2 + \frac{1}{6}\kappa^2\rho_B a^4 - k\;a^2 + C\right),$$

$$b = C_3\frac{a_\xi}{n}, \qquad (10)$$

где C_3 = const. В результате получаем

$$E_\xi = (a^2)_\xi = \pm\frac{2n}{\lambda v}\sqrt{\frac{\lambda^2}{C_3{}^2}a^2n^2 + \frac{1}{6}\kappa^2\rho_B a^4 - k\;a^2 + C}. \qquad (11)$$

Это уравнение имеет следующее решение:

$$\beta_2 H^2 + \beta_1 H + \beta_0 = 0, \qquad (12)$$

где

$$H = n^2, \quad \beta_2 = \frac{4E}{v^2C_3^2},$$

$$\beta_1 = \left[\frac{2}{3}\frac{\kappa^2\rho_B E^2}{\lambda^2 v^2} - \frac{4kE}{\lambda^2 v^2} + \frac{4C}{\lambda^2 v^2}\right], \quad \beta_0 = -E_\xi^2. \qquad (13)$$

Имеем

$$H_{1,2} = (n^2)_{1,2} = \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_2\beta_0}}{2\beta_2}. \qquad (14)$$

В этом случае метрика (3) выглядит как

$$ds^2 = -H_j d\tau^2 + Edx^i dx^j + \left[C_3\frac{(\sqrt{E})_\xi}{\sqrt{H_j}}\right]^2 dy^2. \qquad (15)$$

iii). Теперь найдем такие решения УЭ, которые связаны с методом разделения переменных. Пусть

$$a(y,\tau) = a_1(\tau)a_2(y), \quad b(y,\tau) = b_1(\tau)b_2(y),$$

$$n(y,\tau) = n_1(\tau)n_2(y). \qquad (16)$$

Подстановка этих выражений в систему (6) дает

$$\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1 n_1 n_2}\right)^2 - \left(\frac{a_2'}{a_2 b_1 b_2}\right)^2 = \frac{1}{6}\kappa^2 \rho_B - \frac{k}{(a_1 a_2)^2} + \frac{C}{(a_1 a_2)^4},$$

$$\frac{\dot{a}_1 b_1}{a_1 \dot{b}_1} = \frac{a_{2\xi}}{n_2} : \left(\frac{a_2}{n_2}\right)_\xi = C_4, \qquad (17)$$

где постоянная C_4 не зависит от t и y. Отсюда получаем

$$a_1 = C_5 b_1^{C_4}, \quad n_2 = \left(C_6 a_2^{C_4 - 1}\right)^{\frac{1}{C_4}}, \qquad (18а)$$

$$n_1 = \pm \frac{C_4 \dot{b}_1}{\left(C_6 a_2^{C_4-1}\right)^{\frac{1}{C_4}}} \times \qquad (18б)$$

$$\times \left\{ \frac{a_{2y}^{\;2}}{(a_2 b_2)^2} - b_1^2 \left[\frac{\kappa^2 \rho_B}{6} - \frac{k}{(a_1 a_2)^2} + \frac{C}{(a_1 a_2)^4} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

где C_5, C_6 = const. В этом случае метрика (3) принимает вид

$$ds^2 = -(C_4 \dot{b}_1)^2 \left\{ \frac{a_{2y}^{\;2}}{(a_2 b_2)^2} - \right.$$

$$\left. - b_1^2 \left[\frac{\kappa^2 \rho_B}{6} - \frac{k}{\left(a_2 C_5 b_1^{C_4}\right)^2} + \frac{C}{\left(a_2 C_5 b_1^{C_4}\right)^4} \right] \right\}^{-1} d\tau^2$$

$$+ (C_5 b_1^{C_4} a_2)^2 dx^i dx^j + (b_1 b_2)^2 dy^2. \qquad (19)$$

4. Заключение. В данной работе нами найден новый класс точных решений пятимерного УЭ (2). Эти решения содержат одну или несколько произвольных функций. Этот факт позволяет теориям, основанным на представлении ”мира на бране”, иметь более богатое и нетривиальное физическое содержание. Такие многомерные теории с большими и бесконечными дополнительными измерениями приводят к важным представлениям о том, какие необычные явления могут происходить на масштабах энергий, доступных для будущих ускорителей, и о редких эффектах в области низких энергий. В рамках этих теорий возникают новые идеи в подходах к решению фундаментальных проблем, таких, как проблема космологической постоянной или начало нашей Вселенной. Все это делает исследования многомерных теорий перспективными и актуальными. С физической точки зрения особенно интересным является учет различных компонентов материи: пыли, радиации, темной материи и т.д., а также учет непертурбативных эффектов в рамках солитонного подхода.

Резюме

Космологикалық тұрақтысы бар кеңістік-уақытта 3-брананың космологиялық моделі зерттелген. Сәйкес Эйнштейн теңдеуінің кейбір қарапайым шешімдері келтірілген. Бұл шешімдердің құрамында бір немесе бірнеше кез келген функциялар бар.

Summary

We study the cosmological model of a 3-brane in a five dimensional space-time with a cosmological constant. Some simple solutions of the Einstein equation are presented in five dimensions. These solutions content one or several arbitrary functions of y and/or t.

Физико-технический институт
МОН РК, г. Алматы

Поступила 20.01.06 г.