УДК 533.15; 536.25

Ю. И. ЖАВРИН, И. В. ПОЯРКОВ, О. В. ФЕДОРЕНКО

ВЛИЯНИЕ ДЛИНЫ ДИФФУЗИОННОГО КАНАЛА НА ИНТЕНСИВНОСТЬ КОНВЕКТИВНОГО СМЕШЕНИЯ

Теоретически исследовано влияние длины диффузионного канала на интенсивность конвективного смешения. Теоретические результаты были представлены для системы 0,4722He+0,5278Ar-N_2 (в качестве диффузионного канала рассматривался вертикальный цилиндр конечной высоты).

Возникновение конвективных течений при многокомпонентной диффузии определяется конкретными значениями параметров состояния: давления, исходного состава газовой смеси, температуры, вязкости и т.п. Устойчивость диффузионного процесса в многокомпонентных газовых смесях характеризуется диффузионным числом Релея, в которое входят как термодинамические параметры, так и геометрические характеристики канала, где происходит смешение. Причем влияние диаметра d и длины L диффузионного канала неоднозначно и определяется через такое понятие, как калибр $h = L/d$. Экспериментальные исследования изотермической диффузии, приведенные в работе [1], позволили сделать вывод, что при неизменном диаметре диффузионного канала увеличение его длины приводит к стабилизации неустойчивого диффузионного переноса, а ее уменьшение – к возникновению конвекции. В частности, для системы 0,4722He+0,5278Ar-N_2 при длине диффузионного канала от L=70,5 мм до L=176,3 мм режим смешения носит конвективный характер, а с длины больше L=176,3 мм наблюдается диффузия.

Класс задач, связанный с концентрационной изотермической конвекцией, в частности с движением газовой трехкомпонентной смеси при наличии пространственной неоднородности, вызванной неоднородностью состава в поле силы тяжести, описывается системой уравнений гидродинамики, которая включает в себя уравнение движения Навье–Стокса и уравнения сохранения числа частиц смеси и компонентов:

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u}\right] = -\nabla p + \eta\Delta\vec{u} + \left(\frac{\eta}{3} + \xi\right)\nabla div\vec{u} + \rho\vec{g},$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -div(n\vec{v}), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + \vec{v}\nabla c_1 = div[D_{11}^*\nabla c_1 + D_{12}^*\nabla c_2],$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + \vec{v}\nabla c_2 = div[D_{21}^*\nabla c_1 + D_{22}^*\nabla c_2],$$

где $\vec{u} = \dfrac{\rho_1\vec{u}_1 + \rho_2\vec{u}_2 + \rho_3\vec{u}_3}{\rho}$ – среднемассовая скорость, ρ – плотность, p – давление, c_i и u_i – концентрация и средняя скорость i-го компонента (компоненты смеси упорядочены так, чтобы $m_1<m_3<m_2$, где m_i – масса молекулы i-го компонента), $\vec{g}$ – ускорение силы тяжести, η и ξ – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости, $\vec{v} = \dfrac{n_1\vec{u}_1 + n_2\vec{u}_2 + n_3\vec{u}_3}{n}$ – среднечисловая скорость.

Уравнения (1) дополняются уравнением состояния среды

$$\rho = \rho(c_1, c_2, p), \quad T = \text{const}, \qquad (2)$$

которое связывает термодинамические параметры.

Уравнения сохранения числа частиц компонентов смеси можно получить из формул [2]:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -div(n_1\vec{u}_1),$$
$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -div(n_2\vec{u}_2), \qquad (3)$$
$$\frac{\partial n_3}{\partial t} = -div(n_3\vec{u}_3).$$

Переходя в (3) к молярным относительным концентрациям и учитывая, что $c_1+c_2+c_3=1$, имеем:

$$n\frac{\partial c_1}{\partial t} + n\vec{v}\nabla c_1 = -div[n_1c_2(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + n_1c_3(\vec{u}_1 - \vec{u}_3)], \quad (4)$$
$$n\frac{\partial c_2}{\partial t} + n\vec{v}\nabla c_2 = -div[n_2c_1(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) + n_2c_3(\vec{u}_2 - \vec{u}_3)].$$

Подставляя в (4) разности скоростей компонентов из уравнений Стефана–Максвелла, получаем систему уравнений в предположении, что числовая плотность n не зависит от координат:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + \vec{v}\nabla c_1 = div[D_{11}^*\nabla c_1 + D_{12}^*\nabla c_2],$$
$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + \vec{v}\nabla c_2 = div[D_{21}^*\nabla c_1 + D_{22}^*\nabla c_2], \qquad (5)$$

где D_{ij}^* – «практические» коэффициенты трехкомпонентной диффузии [3].

При решении системы уравнений (1), (2) применялся метод малого параметра [4,5]. Учитывая, что $L >> d/2$, различия между среднечисловой скоростью $\vec{v}$ и среднемассовой $\vec{u}$ в уравнении Навье–Стокса и непрерывности будут несущественны [2], окончательная система уравнений гравитационной концентрационной конвекции для возмущенных значений в безразмерных величинах имеет вид [6, 7]:

$$P_{22}\frac{\partial c_1}{\partial t}-(\vec{u}\vec{\gamma})=\tau_{11}\nabla^2 c_1+\frac{A_2}{A_1}\tau_{12}\nabla^2 c_2,$$

$$P_{22}\frac{\partial c_2}{\partial t}-(\vec{u}\vec{\gamma})=\frac{A_1}{A_2}\tau_{21}\nabla^2 c_1+\nabla^2 c_2, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}=-\nabla p+\nabla^2\vec{u}+(R_1\tau_{11}c_1+R_2c_2)\vec{\gamma}, \quad div\vec{u}=0,$$

где $P_{ii}=\dfrac{\nu}{D_{ii}^*}$ – диффузионное число Прандтля, $R_i=\dfrac{g\beta_1\Delta c_i d^4}{\nu D_{ii}^* L}$ – парциальное число Рэлея для i-го компонента, ν – кинематическая вязкость, $\tau_{ij}=\dfrac{D_{ij}^*}{D_{22}^*}$ – параметры, определяющие соотношение между «практическими» коэффициентами диффузии, $\nabla c_{i0}=-A_i\vec{\gamma}$, $\beta_i=\dfrac{1}{\rho_0}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial c_i}\right)_{p,T,c_j}$, ρ_0 – средняя плотность.

Большинство экспериментальных исследований, в том числе и в работе [1], проводилось с диффузионным каналом конечной длины, в котором существенны трехмерные движения. Поэтому при аппроксимации скорости следует считать все компоненты вектора $\vec{u}$ отличными от нуля. Рассматривая в цилиндрической системе координат периодические по φ движения и удовлетворяя условиям на твердых границах $z=\pm h$, можно записать аппроксимацию скорости в виде [4]:

$$u_z=\frac{1}{4}(h^2-z^2)^2 u(r)\cos n\varphi,$$

$$u_r=z(h^2-z^2)\upsilon(r)\cos n\varphi, \qquad (7)$$

$$u_\varphi=z(h^2-z^2)\omega(r)\sin n\varphi, \quad (n=0,1,2...).$$

Радиальные функции u, υ, ω должны обращаться в нуль на твердой боковой поверхности цилиндра (при $r=1$). Из уравнения непрерывности следует соотношение, которое связывает эти функции:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\upsilon)+\frac{n}{r}\omega-u=0.$$

Причем

$$u=\frac{J_n(kr)}{J_n(k)}-r^n,$$

$$\upsilon=-\frac{1}{kJ_n(k)}\left[J_n'(kr)-J_n'(k)r^{n+1}\right], \qquad (8)$$

$$\omega=\frac{n}{k^2J_n(k)}\left[\frac{1}{r}J_n(kr)-J_n(k)r^{n+1}\right],$$

где $J_n(kr)$ – функция Бесселя n-го порядка, а параметр k находится из уравнения

$$kJ_n''(k)=(n+1)J_n'(k). \qquad (9)$$

Полагая для первых двух уравнений (6), что $\dfrac{\partial c_i}{\partial t}=0$, найдем концентрации компонентов из уравнений:

$$\nabla^2 c_1=-u_zK_i, \quad i=1,2,$$

где $K_1=\dfrac{\left(1-\dfrac{A_2}{A_1}\tau_{12}\right)}{(\tau_{11}-\tau_{12}\tau_{21})}, K_2=\dfrac{\left(\tau_{11}-\dfrac{A_1}{A_2}\tau_{21}\right)}{(\tau_{11}-\tau_{12}\tau_{21})}.$

Будем считать, что $c_i=f_i(r,z)\cos n\varphi$, тогда

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f_i}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}f_i+\frac{\partial^2 f_i}{\partial z^2}=$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{J_n(kr)}{J_n(k)}-r^n\right](h^2-z^2)^2K_i. \qquad (10)$$

Полагая, что на торцевых поверхностях исчезают возмущения концентраций, из (10) вытекают дополнительные условия – обращение в нуль второй производной $\partial^2 f_i/\partial z^2$ на торцах. Таким образом, имеем условия при $z=\pm h$

$$f_i=0, \frac{\partial^2 f_i}{\partial z^2}=0. \qquad (11)$$

Эти условия позволяют выбрать следующую аппроксимацию:

$$f_i(r,z)=(h^2-z^2)(5h^2-z^2)C_i(r), \qquad (12)$$

где $C_i(r)$ – радиальная функция концентрации.

Для определения $C_i(r)$ применим метод Канторовича, подставляя (12) в (10), умножая на зависящую от z часть функции $f_i(r,z)$ и интегрируя в пределах от $-h$ до h, получаем уравнения:

$$C_i'' + \frac{1}{r}C_i' - \left(\frac{n^2}{r^2} + \alpha^2\right)C_i = -\frac{11}{248}\left[\frac{J_n(kr)}{J_n(k)} - r^n\right]K_i, \tag{13}$$

где $\alpha^2 = \dfrac{153}{62h^2}$, $i = 1, 2$.

При нахождении концентраций компонентов уравнения (13) решались с граничным условием $\left.\dfrac{\partial C_i}{\partial r}\right|_{r=1} = 0$, тогда конечное в центре решение имеет вид

$$c_i = \frac{11K_i\left(h^2 - z^2\right)\left(5h^2 - z^2\right)\cos n\varphi}{248\alpha^2\left(k^2 + \alpha^2\right)} \times$$

$$\times\left[\alpha^2\frac{J_n(kr)}{J_n(k)} + \frac{I_n(\alpha r)}{\alpha I_n(\alpha)}\left\{n\left(\alpha^2 + k^2\right) - \alpha^2 k\frac{J_n'(k)}{J_n(k)}\right\} - \right.$$

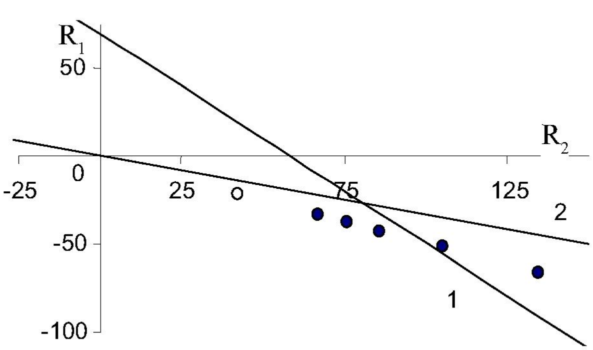
$$\left. -\left(k^2 + \alpha^2\right)r^n\right]. \tag{14}$$

Решение системы уравнений (6) позволяет определить фазовую граничную линию в координатах (R_1, R_2), разграничивающих области монотонных и колебательных возмущений.

Для определения границы монотонной устойчивости рассматриваемой задачи умножим скалярно третье уравнение системы (6) на вектор $\vec{u}$ и проинтегрируем по всему объему V диффузионного канала при условиях, что $\nabla p = 0, \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$:

$$\int \vec{u}\nabla^2\vec{u}dV + R_1\tau_{11}\int u_z c_1 dV + R_2\int u_z c_2 dV = 0. \tag{15}$$

На рис. представлен результат численного решения уравнения (15) для системы 0,4722He+ +0,5278Ar-N_2. Точки, отображающие экспериментальные числа Релея, соответствующие неустойчивому процессу, имеют вид ●, а для диффузии – ○.



Области устойчивой и неустойчивой диффузии: 1 – линия монотонной устойчивости; 2 – линия нулевого градиента плотности; ●, ○ – числа Рэлея, отображающие эксперимент

В работе [8] решение системы (6) дает следующее выражение, связывающее числа Рэлея самого легкого и самого тяжелого компонентов:

$$R_1^* P_{11} + R_2^* P_{22} + \sigma^4 = R_0, \tag{16}$$

где R_0=67,95 – обобщенное число Рэлея, названное авторами критическим числом Рэлея для ограниченного цилиндрического диффузионного канала; $\sigma = \pi d^*$, $d^* = d/L$; $R_i^* = \tau_i \xi_{3i} R_i$; $\tau_i = D_{ii}^* / D_{33}^*$;

$\xi_{3i} = 1 - \dfrac{\Delta c_{0i}}{\Delta c_{03}}$ – параметр, определяющий концентрационный фактор; Δc_{0i} – разность концентраций i-го компонента на границах диффузионного канала.

Соотношение (16) позволяет определить область, в которой находится система по отношению к границе устойчивости. Если левая часть выражения (16) больше, чем R_0, то система находится в области конвекции. Если левая часть выражения (16) меньше, чем R_0, то система находится в области диффузии. В табл. представлены обобщенные числа Рэлея и парциальные числа Рэлея для системы 0,4722He+0,5278Ar-N_2 при варьировании длины диффузионного канала, которые были вычислены по формулам:

$$R_1 = \frac{gnr^4\Delta m_1}{\rho\nu D_{11}^*}\cdot\frac{\partial c_1}{\partial z}, R_2 = \frac{gnr^4\Delta m_2}{\rho\nu D_{22}^*}\cdot\frac{\partial c_2}{\partial z},$$

$$\Delta m_1 = m_1 - m_3, \Delta m_2 = m_2 - m_3. \tag{17}$$

Парциальные числа Рэлея

L, мм	Парциальные числа Рэлея		$R_1^* P_{11} + R_2^* P_{22} + \sigma^4$
	R_1	R_2	
55	-65,9	134,2	100,5
70,5	-51,4	104,7	78,4
86,5	-41,9	85,3	63,9
97,8	-37,1	75,5	56,5
110,5	-32,8	66,8	50,02
176,3	-20,6	41,9	31,4

Согласно данным табл. в системе 0,4722He+ +0,5278Ar-N_2 конвекция наблюдается при L=55 мм и L=70,5 мм. Полученные расчетные данные не дают удовлетворительного согласия с экспериментом, представленным в работе [1], хотя они достаточно хорошо согласуются с результатами рисунка. Отметим, что при выводе (15) не использовалось предположение о численном значении критического числа Рэлея, равного 67,95.

Таким образом, при изотермической диффузии экспериментальные данные, представленные в работе [1], и теоретические вычисления, рассмотренные в данной статье, качественно согласуются между собой и свидетельствуют о том, что увеличение длины канала стабилизирует неустойчивый диффузионный процесс, а ее уменьшение вызывает появление конвективных течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жаврин Ю.И., Косов В.Н.* Влияние длины канала на устойчивость диффузионного процесса в многокомпонентных газовых смесях // Вестник АН КазССР. 1991. №10. С. 66-65.

2. *Косов В.Н., Селезнев В.Д.* Аномальное возникновение свободной гравитационной конвекции в изотермических тройных газовых смесях. Екатеринбург, 2004. 149 с.

3. *Arnold K.R., Toor H.L.* Unsteady diffusion in ternary gas mixture // A. I. Ch. E. Journal. 1967. V. 13, N6. P. 909-914.

4. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.

6. *Kosov N.D., Zhavrin Yu.I., Kosov V.N.* Formation of structures at instability diffusion in ternary gas mixtures // Inf. conf. of the Methods of Aerophysical Research. Proceeding Part 1. Novosibirsk, 1992. P. 75-78.

7. *Жаврин Ю.И., Косов В.Н.* Концентрационная конвекция и диффузионная устойчивость в изотермических трехкомпонентных газовых смесях // Доклады АН РК. 1996. №3. С. 22-28.

8. *Косов Н.Д., Белов С.М., Жаврин Ю.И., Косов В.Н.* Исследование концентрационной конвекции изотермической двойной газовой смеси для цилиндрического диффузионного канала // Труды 1 Российской национальной конференции по теплообмену. М., 1994. Т. 2. С. 122-127.

Резюме

Конвективтік араласудағы қарқындылыққа диффузиялық каналдағы ұзындықтың әсеріне теориялық зерттеу келтірілген. 0,4722He+0,5278Ar-N_2 жүйесі үшін теориялық нәтижелер келтірілген (диффузиялық канал ретінде шектелген тік цилиндрдің биіктігі алынды).

Summary

The theoretical research of diffusion duct length influence on the convective mixing rate is presented. The theoretical results for the system 0.4722He+0.5278Ar-N_2 are adduced (a finite altitude vertical cylinder is considered a diffusion duct).

НИИ ЭТФ при КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы;
КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 31.01.05 г.