УДК 530.145.6

Т. А. КОЖАМКУЛОВ, М. ДИНЕЙХАН, С. А. ЖАУГАШЕВА, Х. КАРИМЖАН

МАССОВЫЙ СПЕКТР И НАКЛОН РЕДЖЕ ТРАЕКТОРИИ МЕЗОНОВ В РАМКАХ КХД СТРУНЫ

Массовый спектр мезонов, состоящих из легких и тяжелых кварков, вычисляется в рамках КХД струны. Показано, что учет непертурбативного характера взаимодействия, который связан с перенормировкой массы конституэнтных кварков, дает возможность единым образом описать массовый спектр мезонов, состоящий как из легких, так и тяжелых кварков. Определены наклон и пересечение Редже траектории мезонов как орбитальных, так и радиальных возбуждений.

1. Введение. Описание массового спектра адронов является одной из фундаментальных проблем сильных взаимодействий. В настоящий момент существуют многочисленные феноменологические модели, которые описывают массовый спектр адронов [1]. Однако все эти модели в основном содержат многочисленные параметры или в них вводятся дополнительные параметры, которые физически никак не обоснованы, либо эти модели ограничиваются только описанием конкретных случаев. Таким образом описание единым образом массового спектра адронов, содержащее только физические параметры, является одним из актуальных проблем современности [2].

В настоящее время квантовая хромодинамика (КХД) рассматривается как истинная непротиворечивая теория, которая полностью описывает поведение кварков и глюонов как "кирпичиков" адронной материи. Однако в КХД все основные явления имеют непертурбативный характер, а вакуум КХД есть плотная и крайне нетривиальная субстанция. Как выяснилось в последние десятилетия, именно свойство вакуума приводит к явлению конфайнмента [3]. В КХД до недавнего времени только в рамках метода правил сумм [4] для описания непертурбативных вкладов использовали калибровочно-инвариантный язык конденсатов. Однако для большинства явлений, возникающих на больших расстояниях, этот метод оказывается недостаточным. Последовательное калибровочно-инвариантное описание непертурбативного характера взаимодействия в КХД стало возможным благодаря появлению метода полевых корреляторов [5].

В данной работе в рамках метода полевых корреляторов определен массовый спектр мезонов с орбитальным и радиальным возбуждениями, также вычислен параметр пересечения и наклон траектории Редже. Статья построена следующим образом: во втором пункте изложена модель, которая описывает массовый спектр связанного состояния непертурбативного характера взаимодействия; в третьем пункте аналитически определен энергетический спектр связанного состояния с орбитальным и радиальным возбуждениями; в четвертом пункте вычислен наклон и параметр пересечения траектории Редже для орбитального и радиального возбуждения и в заключении подытожены полученные результаты, в Приложении приведены некоторые детали вычисления.

2. Модель, описывающая массовый спектр связанного состояния. В данном пункте мы изложим один из альтернативных вариантов определения массы связанного состояния, учитывающий непертурбативный и релятивистский характеры взаимодействия, которые рассмотренны в работах [5].

Одной из фундаментальных проблем при описании механизма взаимодействия связанного состояния является определение массы системы. Рассмотрим взаимодействие двух заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле. Предположим, что система этих частиц образует связанное состояние. Определим массу связанного состояния на основе исследования асимптотического поведения функции поляризационной петли для заряженной скалярной частицы во внешнем калибровочном поле. Поляризационный оператор скалярной частицы во внешнем калибровочном поле записывается следующим образом:

$$G(x,y|A)=\int\limits_0^{\infty}\frac{ds}{(4\pi s)^2}\exp\left(sm^2-\frac{(x-y)^2}{4s}\right)\times$$

$$\times\left|\int d\sigma_B \exp\left(ig\int\limits_0^{\infty}d\xi\frac{\partial z_\alpha(\xi)}{\partial\xi}A_\alpha(\xi)\right)\right|. \quad (2.1)$$

Здесь производится усреднение по внешнему калибровочному полю $A_\alpha(x)$. Функция Грина $G_m(y,x|A)$ для скалярной частицы во внешнем калибровочном поле определяется из уравнения

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x_a}+\frac{g}{c\hbar}A_a(x)\right)^2+\frac{c^2}{\hbar^2}m^2\right]G(x,y|A_a)=\delta(x-y), \quad (2.2)$$

где m – масса скалярной частицы, а g – константа связи. При усреднении по внешнему калибровочному полю $A_\alpha(x)$ ограничиваемся только низшим порядком, т.е. учитываем только двухточечный гауссов коррелятор:

$$\left\langle\exp\left\{i\int dxA_\alpha(x)J_\alpha(x)\right\}\right\rangle_A=$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\iint dxdyJ_\alpha D_{\alpha\beta}(x-y)J_\beta(y)\right\}. \quad (2.3)$$

Здесь $J_\alpha(x)$ – реальный ток. Пропагатор калибровочного поля имеет вид

$$D_{\alpha\beta}(x-y)=\left\langle A_\alpha(x)A_\beta(y)\right\rangle_A=\delta_{\alpha\beta}D(x-y). \quad (2.4)$$

Для вычисления функции петли, прежде всего, полагаем, что решение уравнения (2.2) представляется в виде функционального интеграла:

$$G(x,y|A)=\int\limits_0^{\infty}\frac{ds}{(4\pi s)^2}\exp\left(sm^2-\frac{(x-y)^2}{4s}\right)\times$$

$$\times\int d\sigma_B \exp\left(ig\int\limits_0^{\infty}d\xi\frac{\partial z_\alpha(\xi)}{\partial\xi}A_\alpha(\xi)\right), \quad (2.5)$$

где введены обозначения:

$$z_\alpha(\xi)=(x-y)_\alpha+y_\alpha-2\sqrt{s}B_\alpha(\xi), \quad (2.6)$$

$$d\sigma_B=N\delta\vec{B}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 d\xi\vec{B}^2(\xi)\right)$$

с нормировкой

$$B_\alpha(0)=B_\alpha(1); \quad \int d\sigma_B=1.$$

Подставляя (2.5) в (2.1) и проводя усреднение по внешнему фоновому полю $A_\alpha(x)$ для функции-петли, имеем (детали вычисления см. в работе [7])

$$\Pi(x)=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\frac{d\mu_1 d\mu_2}{\left(8\pi^2 x\right)^2}\exp\times$$

$$\times\left[-\frac{1}{2}|x|\left(\frac{m_1^2}{\mu_1}+\mu_1\right)-\frac{|x|}{2}\left(\frac{m_2^2}{\mu_2}+\mu_2\right)\right]\cdot J(\mu_1,\mu_2). \quad (2.7)$$

Здесь

$$J(\mu_1,\mu_2)=N_1N_2\int\delta\vec{r}_1\delta\vec{r}_2\times$$

$$\times e^{\frac{-1}{2}\int\limits_0^x d\tau\left[\mu_1\dot{\vec{r}}_1{}_1(\tau)+\mu_2\dot{\vec{r}}_2(\tau)\right]}e^{-W_{1,1}+2W_{1,2}-W_{2,2}}, \quad (2.8)$$

где

$$W_{i,j}=\frac{g^2}{2}(-1)^{i+j}\int\limits_0^x\int\limits_0^x d\tau_1 d\tau_2\dot{z}_\alpha^{(i)}(\tau_1)\times$$

$$\times D_{\alpha\beta}\left(z^{(i)}(\tau_1)-z^{(j)}(\tau_2)\right)\dot{z}_\beta^{(j)}. \quad (2.9)$$

Функциональный интеграл (2.8) похож на фейнмановский интеграл по траекториям в нерелятивистской квантовой механике [8] для движения двух частиц с массами μ_1, μ_2. Взаимодействие между этими частицами описывается выражением (2.9), в котором содержатся как потенциальные, так и непотенциальные взаимодействия.

Массу связанного состояния обычно определяют через функцию петли $\Pi(x–y)$ следующим образом:

$$M=-\lim_{|x-y|\to\infty}\frac{\ln\Pi(x-y)}{|x-y|}. \quad (2.10)$$

Одной из фундаментальных проблем описания механизма взаимодействия связанного состояния является определение массы системы. Из (2.10) видно, что если мы определим функцию петли, то сможем определить и массу связанного состояния. Однако в общем виде функциональный интеграл, представленный в (2.7) и (2.8), мы не можем вычислить. Согласно (2.10) нужно определить функцию – петли в асимптотике. Пусть в пределе $|x-y|\to\infty$ функциональный интеграл, представленный в (2.8), определяется следующим образом:

$$\lim_{|x|\to\infty} J(\mu_1,\mu_2) = \exp[-xE(\mu_1,\mu_2)], \quad (2.11)$$

где $E(\mu)$ – величина, которая зависит только от μ_1, μ_2, а также от константы взаимодействия – g. В данном приближении интеграл, представленный в (2.7), в асимптотике $|x-y|\to\infty$ вычисляется методом перевала, тогда из (2.10) для массы связанного состояния получаем

$$M = \sqrt{m_1^2-2\mu^2E'(\mu)} + \sqrt{m_2^2-2\mu^2E'(\mu)} + $$

$$+ \mu E'(\mu) + E(\mu), \quad (2.12)$$

параметр μ определяем из уравнения

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{\sqrt{m_1^2-2\mu^2E'(\mu)}} + \frac{1}{\sqrt{m_2^2-2\mu^2E'(\mu)}}, \quad (2.13)$$

где использовано обозначение $E'(\mu) = \dfrac{\partial E(\mu)}{\partial \mu}$.

Параметры μ_1, μ_2 будем рассматривать как массу составляющих в связанном состоянии. Эта масса отличается от m_1, m_2 – масс исходного свободного состояния. При описании массового спектра релятивистского связанного состояния обычно вводится конституэнтая масса составляющих, которая отличается от массы исходной частицы. В частности, при описании массового спектра адронов, состоящих из кварков, обычно вводятся массы валентных и токовых кварков, которые отличаются между собой. Мы установили аналитическое соотношение между конституэнтой массой и массой свободных состояний.

3. Энергетический спектр связанного состояния с орбитальным и радиальным возбуждениями. Согласно (2.12) определим энергетический спектр гамильтониана взаимодействия с линейно растущим потенциалом:

$$\left[\frac{1}{2\mu}\vec{P}^2 + \sigma r\right]\Psi = E(\mu)\Psi, \quad (3.1)$$

где σ– натяжения струны. Энергетический спектр и волновая функция определяется из уравнения Шредингера (УШ) (3.1) в рамках метода осцилляторного представления (ОП). Прежде всего, переходим к d-мерному вспомогательному пространству R^d, а гамильтониан взаимодействия представляем в нормальной форме по операторам рождения *(a^+)* и уничтожения *(a)* (детали подробнее см. в [9]):

$$H = H_0 + \varepsilon_0(E_r) + H_I, \quad (3.2)$$

где H_0 – гамильтониан свободного осциллятора

$$H_0 = \omega(a^+a), \quad (3.3)$$

а ε_0 – энергия основного состояния в R^d, которая имеет вид

$$\varepsilon_0(\mathrm{E}) = \frac{d}{4}\omega - \frac{4\rho^2\mu E\Gamma\left(\frac{d}{2}+2\rho-1\right)}{\omega^{2\rho-1}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{4\rho^2\mu\sigma\Gamma\left(\frac{d}{2}+3\rho-1\right)}{\omega^{3\rho-1}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}. \quad (3.4)$$

H_I – гамильтониан взаимодействия, представленный в нормальной форме:

$$H_I = \int_0^\infty dx \int\left(\frac{d\eta_1}{\sqrt{\pi}}\right)^d \cdot e^{-\tau^2(1+x)} : e_2^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)} :$$

$$\left\{-\frac{4\rho^2\mu}{\omega^{2\rho-1}}\cdot\frac{Ex^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} + \frac{4\rho^2\mu\sigma x^{-3\rho}}{\omega^{3\rho-1}\Gamma(1-3\rho)}\right\}, \quad (3.5)$$

где введено обозначение

$$e_2^{-Z} = e^{-Z} - 1 + Z - \frac{1}{2}Z^2.$$

Здесь :*: является символом нормального упорядочения, а η_j и a_j – векторы в R^d. В (3.3)–(3.5) параметр ω определяется из осцилляторного представления и размерность вспомогательного пространства равна

$$d = 2 + 2\rho + 4\rho l, \quad (3.6)$$

а c – вариационный параметр, который связан с асимптотическим поведением волновой функции.

Определим энергетический спектр с орбитальным и радиальным возбуждениями. В ОП волновая функция с радиальным возбуждением определяется в следующим виде:

$$|n_r\rangle = C_{n_r}\left(a^+a^+\right)^{n_r}|0\rangle,$$

$$C_{n_r} = \left[\frac{\Gamma(d/2)}{4^{n_r}n_r!\Gamma(d/2+n_r)}\right]^{1/2}, \quad n = 1+\ell+n_r. \quad (3.7)$$

Энергетический спектр равен

$$\varepsilon_{n_r}(E) = \langle n_r|H|n_r\rangle = \varepsilon_0(E) + 2n_r\omega + \langle n_r|H_I|n_r\rangle. \quad (3.8)$$

Детали вычисления матричного элемента $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ приведены в Приложении А и

$$\langle n_r | H_I | n_r \rangle = -\frac{4\rho^2 \mu E}{\omega^{2\rho-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+2\rho-1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \widetilde{B} +$$

$$+\frac{4\rho^2 \mu\sigma}{\omega^{3\rho-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+3\rho-1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \widetilde{C}, \qquad (3.9)$$

где $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ представлены в (А,6) и (А,7) соответственно. Согласно ОП энергетический спектр и частота осциллятора определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon(E) = 0, \\ \dfrac{\partial \varepsilon_0(E)}{\partial \omega} = 0. \end{cases} \qquad (3.10)$$

Прежде всего, определим энергетический спектр полного гамильтониана с орбитальным возбуждением. Тогда, учитывая (3.7), из (3.10) имеем для ω-частоты осциллятора

$$\omega^{\rho} = Z_0 \cdot (\mu\sigma)^{1/3};$$

$$Z_0 = \left[\frac{4\rho^2 \Gamma(4\rho+2\rho l)}{\Gamma(2+\rho+2\rho l)}\right]^{1/3} \qquad (3.11)$$

и для энергетического спектра

$$E = \min_{\rho} \frac{\sigma^{2/3}}{\mu^{1/3}} \times \qquad (3.12)$$

$$\times\left[\frac{Z_0^2}{8\rho^2} \cdot \frac{\Gamma(2+\rho+2\rho l)\Gamma^2(4\rho+2\rho l)}{\Gamma(3\rho+2\rho l)} \cdot \frac{1}{Z_0} \frac{\Gamma(4\rho+2\rho l)}{\Gamma(3\rho+2\rho l)}\right].$$

В этом случае, учитывая (3.11) из (3.12), (2.13) из (2.12), получаем для масс связанного состояния

$$M = 2\sqrt{\sigma}\left[\frac{\Gamma^2(4\rho+2\rho l)\Gamma(2+\rho+2\rho l)}{\rho^2 \Gamma^3(3\rho+2\rho l)}\right]^{1/4}. \qquad (3.13)$$

Теперь приступим к определению массового спектра с орбитальным и радиальным возбуждением. После некоторых простых упрощений имеем для параметра частоты осциллятора:

$$Z_{n_r} = Z_0 D_1^{1/3} \qquad (3.14)$$

и для энергетического спектра

$$E_{n_r} = \frac{\sigma^{2/3}}{\mu^{1/3}} \cdot \min_{\rho} \times \qquad (3.15)$$

$$\times\left\{\left[\frac{\Gamma(2+\rho+2\rho l)\Gamma^2(4\rho+2\rho l)}{4\rho^2\mu^3\Gamma(3\rho+2\rho l)} \cdot\right]^{1/3} \cdot \frac{D_2 D_1 + 2D_3}{2D_1^{1/3}}\right\}.$$

Здесь введем следующие обозначения:

$$D_1 = \frac{\rho + (3\rho-1)\widetilde{B} - 2(2\rho-1)\widetilde{C}}{\rho + (2\rho-1)\dfrac{2n_r}{1+\rho+2\rho\ell} + \dfrac{1}{2}\widetilde{B}};$$

$$D_2 = \left(1 + \frac{4n_r}{1+\rho+2\rho\ell}\right) + \frac{1}{1+\widetilde{B}}; \quad D_3 = \frac{1+\widetilde{C}}{1+\widetilde{B}}. \qquad (3.16)$$

Масса связанного состояния определяется в виде

$$M_{n_r} = 2\sqrt{\sigma}\left[\frac{\Gamma^2(4\rho+2\rho l)\Gamma(2+\rho+2\rho l)}{D_1\rho^2\Gamma^3(3\rho+2\rho l)}\right]^{1/4} \times$$

$$\times\left(\frac{D_2 D_1 + 2D_3}{3}\right)^{3/4}. \qquad (3.17)$$

Мы аналитически определили массу связанного состояния с орбитальным и радиальным возбуждением мезонов, состоящих из легких кварков, при условии $\dfrac{m_a}{\sqrt{\sigma}} \cong \dfrac{m_d}{\sqrt{\sigma}} << 1$.

Теперь приступим к определению массы связанного состояния, состоящего из легких и тяжелых кварков, т.е.

$$m_1 = 0, \quad m_2 = m_q. \qquad (3.18)$$

Тогда после некоторых упрощений получаем для массового спектра:

$$M = \sqrt{\sigma}\left(\mu_0^{1/2} S + \sqrt{\zeta^2 + \mu_0 S^2} + \frac{S^2}{\mu_0^{1/2}}\right); \qquad (3.19)$$

для конституэнтной массы кварков:

$$\mu_1 = \sqrt{\sigma}\mu_0^{1/2} S, \quad \mu_2 = \sqrt{\sigma}\sqrt{\zeta^2 + \mu_0 S^2} \qquad (3.20)$$

и для энергетического спектра:

$$E = \frac{3}{2} \cdot \min_{\rho} \frac{\sqrt{\sigma}}{\mu_0^{1/2}} \cdot S^2. \qquad (3.21)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\zeta^2 = \frac{m_a^2}{\sigma}; \qquad (3.22)$$

$$\mu_0 = \frac{1}{2}\frac{S^4 - 2\zeta^2 S}{2S^3 - \zeta^2} + \sqrt{\frac{(S^4 - 2\zeta^2 S)^2}{4(2S^3 - \zeta^2)^2} + \frac{S^2\zeta^2}{2S^3 - \zeta^2}};$$

$$S^2 = \frac{2}{3}\left[\frac{\Gamma(2+\rho+2\rho l)\Gamma^2(4\rho+2\rho l)}{4\rho^2\mu^3\Gamma(3\rho+2\rho l)D_1}\right]^{1/3}\times$$
$$\times\left[\frac{D_2D_1+2D_3}{2}\right].$$

4. Вычисление наклона и пересечение Редже траектории для орбитального и радиального возбужденных состояний. Из (3.13) и (3.17) аналитически определили массу мезонов с орбитальным и радиальным возбуждениями. В табл. 1 приведены значения квадрата массы в единицах σ для различных ℓ при $n_r = 0$. Приведенные значения квадрата массы $\frac{M^2}{\sigma}$ приближенно можно определить следующим образом:

$$\frac{M^2_{ap}}{\sigma} = 8L + 3,85\pi. \qquad (4.1)$$

В табл. 1 также приведены разности между приближенным и вычисленным значениями величины $\frac{\Delta M^2}{\sigma} = \frac{M^2 - M^2_{ap}}{\sigma}$. Из табл. 1 видно, что отклонения зависимости от значения ℓ составляет всего $\leq 2\%$. В (4.1) определена зависимость ℓ от M^2_{ap}:

Таблица 1. **Зависимость $\frac{M^2}{\sigma}$ от ℓ при $n_r = 0$, которая определена в (3.13), значения $\frac{M^2_{ap}}{\sigma}$ в зависимости от ℓ, которые вычислены по приближенной формуле (4.1)**

ℓ	$\frac{M^2}{\sigma}$	$\frac{M^2_{ap}}{\sigma}$	$\frac{\Delta M^2}{\sigma}$
1	18,9756	18,948	-0,0276
2	26,961	26,948	-0,0130
3	34,9517	34,948	-0,0037
4	42,9483	42,948	-0,0003
5	50,9453	50,948	0,0027
6	58,9425	58,948	0,00553
7	66,9418	66,948	0,00615
8	74,9402	74,948	0,00782
9	82,9391	82,948	0,00892
10	90,9381	90,948	0,00985
11	98,9374	98,948	0,0106
12	106,9363	106,948	0,0117
13	114,9356	114,948	0,0124
14	122,9349	122,948	0,0131
15	130,9353	130,948	0,0127

$$\ell = \frac{1}{8\sigma}M^2_{ap}L - \frac{3,485\pi}{8}. \qquad (4.2)$$

Тогда для наклона и параметра пересечения Редже траектории получаем

$$\alpha'_L = 0,781GeV^{-2};\quad \alpha(0) = -1,335. \qquad (4.3)$$

В настоящий момент экспериментальное значение параметра пересечения и наклона Редже траектории равны

$$\alpha'_{L\exp} = 0,81GeV^{-2};\quad \alpha(0) = -0,3 \pm 0,02. \qquad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4) видно, что согласие параметра пересечения и наклона траектории Редже не так хорошо. Это связано с тем, что при определении массы связанного состояния мы не учитываем непертурбативную добавку, которая связана с перенормировкой массы и струновой поправкой. Это заслуживает дальнейших исследований. Из (4.3) и (4.4) видно, что знаки параметра пересечения и наклона Редже траектории согласуются с экспериментальными данными.

В настоящий момент экспериментально определена масса с радиальным возбуждением $n_r = 1,2,3$ в установке Crystal Barrel [10] и найдено, что радиальные Редже траектории являются линейными, т.е.

$$M^2(n_r, L) = M^2(0, L) + \Omega_L n_r. \qquad (4.5)$$

Массовый спектр связанного состояния с орбитальными и радиальными возбуждениями в единице $\sqrt{\sigma}$ представлен в табл. 2. Из численных результатов табл. 2 установлено, что с возрастанием ℓ параметр Ω_L уменьшается.

Из (3.19) и (3.20) определили массы связанного состояний, состоящих из легких и тяжелых

Таблица 2. **Массовый спектр мезонов, состоящий из легких- легких кварков с орбитальным и радиальным возбуждениями**

$\ell \setminus n$	1	2	3	4	5
0	4,0069	4,25449	4,42663	4,56375	4,67977
1	4,46497	4,7813	5,14356	5,52871	5,92795
2	4,88854	5,21846	5,66836	6,1637	6,67457
3	5,2815	5,60484	6,08004	6,5311	7,10673
4	5,64877	5,95908	6,43353	6,93486	7,42681
5	5,99446	6,29038	6,75457	7,23718	7,70583
6	6,32181	6,60378	7,05465	7,51819	7,9661
7	6,63336	6,90244	7,33942	7,78527	8,21525
8	6,93115	7,18852	7,61202	8,04017	8,45623
9	7,21682	7,46362	7,8744	8,2898	8,69042
10	7,49173	7,72897	8,12789	8,53025	8,9186

кварков и конституэнтной массы кварков. Предполагается, что масса S – кварка равна $m_S = 155 MeV$, определено численное значение масс спектра и конституэнтной массы кварков. В этом случае наши результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3. **Массовый спектр мезонов легких и тяжелых кварков с орбитальными и радиальными возбуждениями. Масса S кварка $m_S = 155 MeV$, а натяжение струны $\sigma = 0{,}19 GeV^2$**

ℓ	$M_{m'}$, GeV	μ_1, GeV	μ_2, GeV
0	1,49963	0,37432	0,405143
1	3,33729	0,834263	0,848541
2	5,6364	1,40909	1,41759
3	8,31324	2,07831	2,08408
4	11,3192	2,8981	2,83405
5	14,6212	3,65529	3,65858
6	18,1944	4,54859	4,55123
7	22,0195	5,50487	5,50706
8	26,0809	6,52022	6,52207
9	30,3655	7,56138	7,59296
10	34,8622	8,71555	8,71693

В этом случае также можем определить зависимость $\frac{M_{ap}^2}{\sigma}$ от ℓ. Наши результаты показывают, что ℓ-траектории Редже не являются линейными, т.е. это согласуется с результатами работы [11].

Приложение А. В этом пункте изложим некоторые детали вычисления матричного элемента $\langle n_r|H_I|n_r\rangle$.

$$\langle n_r|H_I|n_r\rangle = \int_0^\infty dx \times$$

$$\times\left\{-\frac{4\rho^2\mu E}{\omega^{2\rho-1}}\cdot\frac{x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)}+\frac{4\rho^2\mu\sigma}{\omega^{3\rho-1}}\frac{x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)}\right\},$$

$$\langle n_r|\cdot\int\left(\frac{d\eta_1}{\sqrt{\pi}}\right)^d\cdot e^{-\tau^2(1+x)}:e_r^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)}:|n_r\rangle. \quad (A.1)$$

Учитывая (3.7) и следующие представления,

$$e^{-i(k\cdot\vec{a})} = P_v e^{-iv(k\cdot\vec{a})}; \qquad (A.2)$$

и

$$\left(a^+a^+\right)^n = (-1)^n\frac{d^n}{d\beta^n}e^{-\beta\left(a^+a^+\right)}\Bigg|_{\beta=0} =$$

$$=(-1)^n\frac{d^n}{d\beta^n}\int_0^\infty\left(\frac{d\xi}{\sqrt{\pi}}\right)^d e^{-\xi-2i\sqrt{\beta}\left(a^+\xi\right)}\Bigg|_{\beta=0},$$

после некоторых упрощений из (А.1) получаем

$$T_n(x)=\int\left(\frac{d\eta_1}{\sqrt{\pi}}\right)^d\cdot e^{-\tau^2(1+x)}\langle n|:e_r^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)}:|n\rangle=$$

$$=P_vC_n^2\frac{d^{2n}}{d\alpha^n\beta^n}\int\left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}^2}\right)^d\iint\left(\frac{d\xi_1}{\sqrt{\pi}}\right)^d\left(\frac{d\xi_2}{\sqrt{\pi}}\right)^d$$

$$\cdot e^{-\tau^2(1+x)-\xi_1^2-\xi_2^2}\langle 0|e^{-2i\sqrt{\alpha}(a\xi_1)}e^{-\tau^2(1+x)}$$

$$\cdot e_r^{-iv\sqrt{2x}(a^+\eta)}e_r^{-iv\sqrt{2x}(a\eta)}e^{-2i\sqrt{\beta}(a^+\xi_{21})}|0\rangle\Big|_{\beta,\alpha} \quad (A.3)$$

и окончательно

$$T_n(k)=\sum_{k=2}^{2n}\sum_{S=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{(1+x)^{k+d/2}}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(n+d/2)}\times$$

$$\times\frac{2^{2S-k}}{\Gamma(n-S+1)}\cdot\frac{\Gamma(k+n-S+d/2)}{\Gamma^2(k-S+1)\Gamma(2S-k+1)}. \quad (A.4)$$

Учитывая (А.3), подставляя (А.4) в (А.1) и проводя интегрирования по x, из (А.1) имеем:

$$\langle n_r|H_I|n_r\rangle = \int_0^\infty dx \times$$

$$\times\left\{-\frac{4\rho^2\mu E}{\omega^{2\rho-1}}\cdot\frac{x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)}+\frac{4\rho^2\mu\sigma}{\omega^{3\rho-1}}\frac{x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)}\right\}.$$

$$\langle n_r|\cdot\int\left(\frac{d\eta_1}{\sqrt{\pi}}\right)^d\cdot e^{-\tau^2(1+x)}:e_r^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)}:|n_r\rangle. \quad (A.5)$$

Здесь

$$\widetilde{B}=\frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)}\cdot\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2+2\rho-1)}\times$$

$$\times\sum_{k=2}^{2n_r}(-1)^k A_{n_r}(k)\frac{\Gamma(k+d/2+2\rho-1)}{\Gamma(k+d/2)} \quad (A.6)$$

и

$$\widetilde{C}=\frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)}\cdot\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2+3\rho-1)}\times$$

$$\times\sum_{k=2}^{2n_r}(-1)^k A_{n_r}(k)\frac{\Gamma(k+d/2+3\rho-1)}{\Gamma(k+d/2)},\qquad (A.7)$$

где

$$A_{n_r}(k)=\sum_{k=2}^{2n_r}\frac{2^{2S-k}}{\Gamma(n_r-S+1)}\cdot\frac{\Gamma(k+n_r-S+d/2)}{\Gamma(k-S+1)\Gamma(2S-k+1)}.\ (A.8)$$

Эти выражения (А.5)–(А.8) использованы для определение энергетического спектра связанного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lucha W., Schoberl F.F., Gromes D.* Phys. Rep., 200, 127(1991).

2. *Bali G.S., Schilling K., Wachter A.* Phys. Rev. D.56, 2556 (1997), hep- lat/9703019; *Bali G.S., Boyle P.* Phys. Rev. D.59, 114501 (1999), hep- lat/9809180.

3. *Симонов Ю.А.* УФН, 166, 337 (1996).

4. *Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.* Nucl. Phys. B.147, 385, (1979).

5. *Giacomo Di.* et al. Phys. Rep. 372, 319 (2002).

6. *Dineykhan M., Zhaugasheva S.A., Kozhamkulov T. A., Petrov Ye. V.* Few-body Systems, v. **35**, p.118-130 (2005); *Динейхан М., Жаугашева С.А., Кожамкулов Т.А.* ЯФ т. **68** с 350-360 (2005).

7. *Dineykhan M., Efimov G.V., Namsrai Kh.* Fortsh. Phys., 39, p. 259(1991).

8. *Feynman R.P., Hibbs A.P.* Quantum Mechanics and Path Integrals. (New York McGraw-Hill 1965).

9. *Dineykhan M.* et. al. “Oscillator Representation in Quantum Physics” Springer – Verlag Berlin Heilelberg, v. m26 (1995).

10. *Abele A.* et. al., (Crystal Barrel), Phys. Lett. B 423, 175 (1998); Amsler, Rev. Mod. Phys. 70, 1293 (1998); *Barnes P.* Talk on “Physics and Detectors of DFNE”, hep- ph /0001326; hep-ph/9907259.

11. *Tang* A., *John W.* Norbury. Phys. Rev., D62, 016006 (2000).

Резюме

КХД ішектері моделіндегі, жеңіл және ауыр кварктерден тұратын мезондардың массалық спектрі анықталған. Конституэнттік кварктердің массаларының қайта қалыптастыруымен байланысты әрекеттесудің пертурбативті емес сипаттамасын ескерген кезде, жеңіл және ауыр кварктерден тұратын мезондардың массалық спектрін тұтас түрде сипаттауға мүмкіндік беретіні көрсетілген. Орбиталды және радиалды қозған күйлер кезіндегі мезондардың Редже траекториясын қиюы және иілуі анықталған.

Summary

The mass spectrum of light-light and heavy – light mesons are calculated within the framework of the QCD string model. Shown that, for the description meson masses must to taken into account the contributions of nonperturbation interaction, important. The slope and the intercept of the meson’s Regge trajectory are calculated for the orbital and radial excited states.

КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 13.03.06 г.