

УДК 530.145.6

Т. А. КОЖАМКУЛОВ, С. А. ЖАУГАШЕВА, К. С. ДЮСЕБАЕВА

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССОВОГО СПЕКТРА РЕЛЯТИВИСТСКОГО СВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ С АБНОРМАЛЬНЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Показано в рамках простой юкавской модели, что предположение об аналитическом конфайнменте (пропагаторы частиц являются целыми аналитическими функциями гауссовского типа) и уравнение Бете-Солпитера объясняет главные качественные черты спектра легких и тяжелых мезонов: существование стабильных связанных состояний с массами, превышающими сумму масс конститuentных частиц. Определена зависимость массового спектра орбитальных и абнормальных возбужденных состояний от шкалы конфайнмента.

**1. Введение.** В настоящее время квантовая хромодинамика (КХД) рассматривается как истинная непротиворечивая теория, которая полностью описывает поведение кварков и глюонов как “кирпичиков” адронной материи. Однако при эксперименте наблюдаются только бесцветные адроны как связанные состояния кварков и глюонов. До сих пор отсутствует точное решение проблем возникновения конфайнмента и адронизации кварков. Тем не менее общепринято считать, что конфайнмент может быть объяснен только вне рамок теории возмущений и связан с возникновением линейно растущего кварк-кваркового потенциала или кварк-антикварковой “струны” в результате нелинейного глюон-глюонного взаимодействия (см., например, [1]). Как следствие, механизм превращения кварков и глюонов в адроны также не вполне ясен, поэтому само понятие кварковой и глюонной структуры зависит от рассматриваемого физического контекста. Таким образом, цель всех теоретических подходов, декларирующих связь с “основными принципами” КХД, состоит в том, чтобы иметь возможность сравнивать различные характеристики адронных процессов, используя различные симметрии и их нарушения (киральная, флейворная, аномалии, смешивание и т.д.) и вводя дополнительные параметры, “имеющие ясный физический смысл”. Имеется огромная литература по этой проблеме (см., например, [2, 3]).

С физической точки зрения очевидно, что процессы конфайнмента и адронизации кварков происходят на одних и тех же расстояниях. Поэтому необходимо знать поведение кварков

и глюонов в этой области. Естественно, что стандартные пропагаторы Дирака для кварков и Клейна-Гордона для глюонов, соответствующие плоским волнам, не могут правильно описать эти частицы в области конфайнмента и адронизации. Было найдено (см. [4, 5]), что в самодуальном глюонном поле с постоянной напряженностью пропагаторы конститuentных частиц (кварков и глюонов) оказываются целыми аналитическими функциями гауссовского типа в импульсном пространстве, т.е. имеет место аналитический конфайнмент и конститuentные частицы не могут существовать как обычные частицы.

Предположим, что вакуум КХД реализуется самодуальным глюонным полем с постоянной напряженностью. Тогда можно построить квантовую полевую модель аналитического конфайнмента [4–6], в которой лагранжиан записывается в вакуумном поле, так, что пропагаторы кварков и глюонов являются целыми аналитическими функциями гауссовского типа в импульсном пространстве. При этом эффективная константа связи должна быть малой и все расчеты можно проводить по теории возмущений, включая образование связанных состояний, которые могут описываться уравнением Бете–Солпитера (БС) в лестничном приближении. Проведенные расчеты показали, что модель согласуется с имеющимися экспериментальными данными.

Итак, главным динамическим фактом является *аналитический* конфайнмент, то, что пропагаторы кварков и глюонов являются целыми аналитическими функциями гауссовского типа в импульсном пространстве и при этом эффективная

константа связи достаточно мала. Тогда само это обстоятельство должно объяснить некоторые общие характерные черты адронной физики.

Мезоны как связанные системы легких и тяжелых кварков характеризуются различными квантовыми числами, без учета которых нельзя детально описать динамику взаимодействий и их различные характеристики. Однако, если природа конфайнмента нами правильно угадана, тогда должны существовать некоторые общие динамические свойства мезонов, которые слабо зависят от квантовых чисел и могут быть поняты в рамках аналитического конфайнмента. С нашей точки зрения, такие общие свойства мезонов проявляются в характере их спектра масс, общие черты которого определяются только массами конститuentных кварков, шкалой конфайнмента и малой константой связи кварк-глюонного взаимодействия, причем природа кварков и глюонов не существенна.

В работе [7] было показано, что основные черты адронного спектра можно объяснить, предположив, что тип пропагаторов кварков и глюонов – просто гауссовские экспоненты и адроны возникают как решения уравнения БС.

Наша работа посвящена объяснению главной качественной черты спектра легких, тяжелых мезонов и мезонов с “экзотическими” квантовыми числами в рамках уравнения БС с аналитическим конфайнментом, когда пропагаторы частиц являются целыми аналитическими функциями гауссовского типа.

**2. Юкавская модель с аналитическим конфайнментом.** Рассмотрим юкавское взаимодействие заряженных скалярных частиц  $\Phi$  с массой  $m$  с безмассовыми скалярными частицами  $\varphi$ . Лагранжиан системы имеет вид

$$L = (\Phi^+ S^{-1} \Phi) + \frac{1}{2} (\varphi D^{-1} \varphi) + g(\Phi^+ \Phi \varphi). \quad (2.1)$$

Здесь  $g$  – константа связи, имеющая размерность квадрата массы.

Все рассмотрения будем проводить в евклидовом пространстве. Условно будем называть частицы  $\Phi$  “кварками”, а безмассовые частицы  $\varphi$  “глюонами”. Будем предполагать, что в рассматриваемой системе имеет место аналитический конфайнмент, т.е. пропагаторы частиц являются целыми аналитическими функциями гауссовского типа в импульсном  $p$ -пространстве, что обеспечивает ненаблюдаемость, т.е. эти кванты

$\Phi$ ,  $\varphi$  полей не могут существовать как обычные частицы (подробнее см. в [6]). В данной работе пропагаторы выберем в следующем виде:

$$\tilde{D}(p^2) = \frac{1}{p^2} \left( 1 - e^{-p^2/2\Lambda^2} \right) = \frac{1}{2\Lambda^2} \int_0^1 ds e^{-\frac{p^2 s}{2\Lambda^2}} \Rightarrow \frac{1}{p^2} \quad \text{при } \Lambda > 0, \quad (2.2)$$

для безмассовых частиц и

$$\begin{aligned} \tilde{S}(p^2) &= \frac{1}{p^2 + m^2} \left( 1 - e^{-\frac{p^2 + m^2}{2\Lambda^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2\Lambda^2} \int_0^1 ds e^{-\frac{(p^2 + m^2)s}{2\Lambda^2}} \Rightarrow \frac{1}{p^2 + m^2} \quad \text{при } \Lambda > 0 \quad (2.3) \end{aligned}$$

для частиц с массой  $m$ .

В координатном представлении получим

$$\begin{aligned} D(y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipy} \tilde{D}(p^2) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{y^2} e^{-\frac{\Lambda^2}{2} y^2} = \frac{\Lambda^2}{8\pi^2} \int_1^\infty ds e^{-\frac{y^2 \Lambda^2 s}{2}}, \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$S(y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipy} \tilde{S}(p^2) = \frac{\Lambda^2}{8\pi^2} \int_1^\infty ds e^{-\frac{y^2 \Lambda^2 s}{2} - \frac{m^2}{2\Lambda^2 s}}.$$

Здесь  $y = (y, y_\lambda)$ ,  $y \in R^3$ ,  $y \in R^1$ . Параметр  $\Lambda$  определяет шкалу конфайнмента (подробнее см. в [6, 8]). При  $\Lambda > 0$  мы имеем стандартное локальное юкавское взаимодействие скалярных частиц.

Выбор пропагаторов в наиболее простой форме (2.4) сделан только ради простоты и наглядности вычислений, которые должны подчеркнуть, что именно гауссов характер аналитического конфайнмента определяет главные черты адронного спектра. Заметим, что явный вид пропагаторов в самодуальном поле определен в [4, 5, 8].

Рассматриваемая модель определяется двумя безразмерными параметрами

$$\alpha_s = \frac{g^2}{16\pi\Lambda^2}, \quad \nu = \frac{\Lambda}{m}. \quad (2.5)$$

Мы будем рассматривать следующую задачу. В системе  $(\Phi^+ \Phi)$  частиц возникает связанное состояние с массой

$$M = M(\alpha_s, \nu) = 2m \tilde{M}(\alpha_s, \nu). \quad (2.6)$$

Пусть заданы шкала конфайнмента  $\Lambda$  и константа связи  $\alpha_s$ . Естественно, ожидается, что при малых  $\alpha_s \ll 1$  для тяжелых кварков ( $\nu = \frac{\Lambda}{m} \ll 1$ )

масса связанного основного состояния должна быть близкой к спектру нерелятивистского уравнения Шредингера, т.е.

$$M \sim 2m - \frac{\alpha_s^2 m}{2} \quad (2.7)$$

Однако при увеличении константы связи  $\alpha_s \leq 1$  и переходе к легким кваркам ( $v = \frac{\Lambda}{m} \sim 1$ ) масса связанного состояния уже не будет определяться формулой (2.7). Наша задача состоит в том, чтобы определить область изменения параметров  $\alpha_s$  и  $v$ , в которой справедливо нерелятивистское приближение, и выяснить, как ведет себя масса связанного состояния в области  $\alpha_s \leq 1$  и ( $v = \frac{\Lambda}{m} \sim 1$ ).

**3. Связанные состояния ( $\Phi^+ \Phi$ ).** Состояния стабильных объектов в физике элементарных частиц характеризуются совокупностью трех квантовых чисел: орбитального  $\ell$ , азимутального  $m$  и радиального  $n$ . Эти квантовые числа связаны с трехмерным пространством  $R^3$ , в котором находится частица. Однако волновая функция, описывающая релятивистскую частицу и являющаяся решением уравнения БС в четырехмерном пространстве  $R^4$ , требует для своего описания дополнительное квантовое число, связанное с четвертой временной степенью свободы, —  $t$  в пространстве Минковского или  $y_4$  в пространстве Евклида. Такое квантовое число обозначается  $\kappa$ . В нерелятивистском пределе выживают только состояния с  $\kappa = 0$ , но в релятивистском случае существуют состояния с  $\kappa \geq 1$ , которые называются “абнормальными” (*abnormal*). Нужно заметить, что эти состояния еще не изучены должным образом.

Релятивистские связанные состояния в системе ( $\Phi^+ \Phi$ ) характеризуются квантовыми числами  $Q = (n \ell m \kappa)$ , где  $n$  — радиальное,  $\ell$  — орбитальное и  $m$  — магнитное квантовые числа. Квантовое число  $\kappa = 0, \sim 1, \sim 2, \dots$  связано с четвертой степенью свободы  $x_4$  в пространстве  $R^4$  и определяет так называемые “абнормальные” (*abnormal*) состояния. Заметим, что в нерелятивистском пределе выживают только состояния с  $\kappa = 0$ .

Ниже мы будем рассматривать только “кварковые” токи с нулевым радиальным квантовым числом  $n=0$ , которые могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\ell m \kappa}(x) &= \left( \Phi^+(x) V_{\ell m \kappa} \left( \vec{\partial}_x \right) \Phi(x) \right) = \\ &= \left( \Phi^+(x) Y_{\ell m} \left( \vec{\nabla}_x \right) H_{\kappa} \left( \vec{\partial}_{x_4} \right) R_{\ell \kappa} \left( \vec{\partial}_x^2, \vec{\partial}_{x_4}^2 \right) \Phi(x) \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

здесь  $Y_{\ell m}$  — стандартная сферическая функция,  $H_{\kappa}$  — полином степени  $\kappa$  и  $R_{\ell \kappa}$  — вершинная функция, которая определяется решением соответствующего уравнения на связанные состояния.

Стандартная форма  $J^{PC}$  квантовых чисел тока  $\mathfrak{T}_{\ell m \kappa}$  имеет вид

$$J^{PC} : J = \ell, P = (-1)^{\ell}; C = (-1)^{\ell + \kappa}. \quad (3.2)$$

Для вычисления массы  $M_{\ell \kappa}$  связанного состояния, определяемого током  $\mathfrak{T}_{\ell m \kappa}$ , воспользуемся уравнением БС в лестничном приближении (см. [9]). Как показано в [9], решение уравнения БС сводится к следующей вариационной задаче:

$$B_{\ell \kappa}(p^2) \max_{\Psi_{\ell m \kappa}} \frac{(\Psi_{\ell m \kappa} | D \Pi_p | D \Psi_{\ell m \kappa})}{(\Psi_{\ell m \kappa} | D \Psi_{\ell m \kappa})}. \quad (3.3)$$

Масса связанного  $M_{\ell \kappa}$  состояния определяется уравнением

$$B_{\ell \kappa}(-M_{\ell \kappa}^2) = 1. \quad (3.4)$$

Волновая функция в четырехмерном пространстве  $R^4$  с  $y = (\mathbf{y}, y_4)$  имеет вид

$$\Psi_{\ell m \kappa}(y) = \Psi_{\ell m \kappa}(y, y_4) Y_{\ell m}(y) H_{\kappa}(y_4) \Psi_{\ell \kappa}(y^2, y_4^2), \quad (3.5)$$

где

$$Y_{\ell m}(y) = y^{\ell} Y_{\ell m}(n_y), \quad y = \sqrt{y^2}, \quad \mathbf{n}_y = \mathbf{y}/y, \quad n_y^2 = 1. \quad (3.6)$$

Условие нормировки записывается как

$$\left( \Psi_{\ell}^+ \Psi_{\ell} \right) = \int d^4 y \Psi_{\ell}^+(y) \Psi_{\ell}(y) = \delta_{\ell \ell} = \delta_{m m} \delta_{\ell \ell} \delta_{m m} \delta_{\kappa \kappa}, \quad (3.7)$$

$$y_4 > it, \quad \Psi_{\ell}(y) = \Psi_{n \ell m \kappa}(\mathbf{y}, it).$$

В данной секции мы рассмотрим только состояния с радиальным  $n=0$  и абнормальным  $\kappa=0$  квантовыми числами. Радиальную часть функции выберем в виде гауссовской экспоненты

$$\Psi_{0 \ell 0}(y^2, y_4^2) = e^{-\frac{\Lambda^2}{2}(ay^2 + by_4^2)}, \quad (3.8)$$

где  $a$  и  $b$  — вариационные параметры.

В случае пропагаторов (2.4) и пробной функции (3.8) вариационная задача (3.3) принимает вид (детали вычислений приведены в Приложении)

$$B_{\ell}(M) = \max_{a,b} \frac{R_{\ell}(a,b)}{N_{\ell}(a,b)}, \quad (3.9)$$

где

$$N_{\ell}(a,b) = \int_0^1 \frac{dt t^{\ell}}{\sqrt{1+2bt}(1+2at)^{\ell+3/2}} \quad (3.10)$$

и

$$R_\ell(a, b) = \frac{\alpha_s}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Lambda}{M} \times \int_0^1 \int_0^1 \frac{ds_1 ds_2}{\sqrt{(1+bs_1)(1+bs_2)} [(1+as_1)(1+as_2)]^{\ell+3/2}} \times \left\{ \int_0^1 \frac{du \exp\left(-\frac{m^2}{\Lambda^2} \varepsilon u\right)}{H^{\ell+3/2}(u, s_1, s_2, a)} \times \operatorname{Erf}\left(\frac{M}{2\Lambda} \frac{u}{\sqrt{2H(u, s_1, s_2, a)}}\right) + \int_0^1 \frac{du \exp\left(-\frac{m^2 \varepsilon}{\Lambda^2} (u+1)\right)}{H^{\ell+3/2}((1+u), s_1, s_2, b)} \times \operatorname{Erf}\left(\frac{M}{2\Lambda} \frac{1-u}{\sqrt{2H(u, s_1, s_2, b)}}\right) \right\}. \quad (3.11)$$

Здесь

$$H(u, s_1, s_2, a) = u + \frac{s_1}{1+as_1} + \frac{s_2}{1+as_2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{M^2}{4m^2} \right], \quad (3.12)$$

$$\int_0^1 dv e^{-a^2 v^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \operatorname{Erf}(a).$$

Уравнение (3.2) при  $\kappa = 0$  определяет массу связанного состояния  $M_\ell$  как функцию от константы связи  $\alpha_s$ , массы “кварка”  $m$  и шкалы конфайнмента  $\Lambda$ .

В вариационной задаче, представленной в (2.1), пробная функция выбрана в гауссовской форме (3.6). Возникает естественный вопрос, насколько точно этот выбор определяет массу связанных состояний. Для проверки точности вычислений мы сравним результаты вариационной задачи (2.1) с известными вычислениями для модели Вик-Куткосского (ВК) [10], которая получается в пределе  $\Lambda > 0$ . В этом случае массы стабильных связанных состояний при произвольных  $\ell$  меньше  $2m$ .

Следует отметить, что при  $\Lambda = 0$  безразмерная константа связи определяется как

$$\alpha_m = \frac{g^2}{16\pi m^2}. \quad (3.13)$$

Массовый спектр определяется уравнением (3.4). Численные результаты представлены в табл. 1, где сравниваются результаты работ  $B_C$  [9],  $B_T$  [11] с нашими вычислениями  $B_G$ .

Таблица 1. Модель Вик-Куткосского. Значение константы связи  $\alpha_m = 4 \alpha_s$  для различных масс  $M_{\ell/m}$

	$M_{\ell/m}$	0.0	0.5	1.0	1.5	1.9	1.999
$\ell = 0$	$B_C$	25,21	23,93	20,06	13,23	4,493	0,285
	$B_T$	25,13		20,01		4,483	0,289
	$B_G$	25,25	23,95	20,05	13,31	4,468	0,285
$\ell = 1$	$B_C$	76,62	71,47	59,19	37,77	11,73	0,616
	$B_T$	80,22		63,74		16,00	
	$B_G$	76,97	71,62	59,05	38,08	12,47	0,688

Кроме того, в работе [12] был получен график зависимости  $\alpha_m$  от  $M_{\ell/m}$  для  $\ell = 0$ . Наши результаты практически совпадают с [12]. Результаты показаны на рис. 1, где приведен дополнительно график для  $\ell = 1$ .

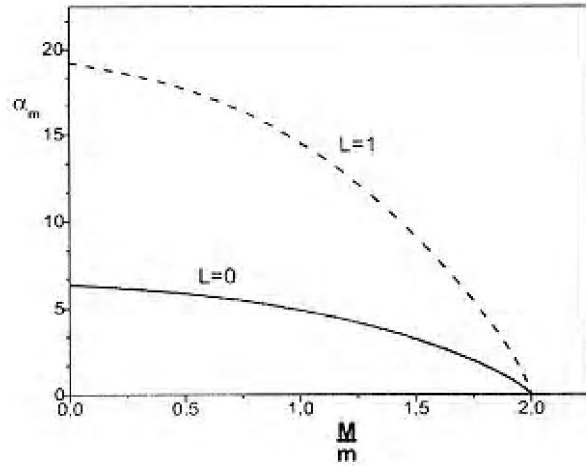


Рис. 1. Зависимость  $\alpha_m$  константы связи от  $M/m$ , определенной в модели ВК

Таким образом, в случае релятивистской модели ВК наш выбор пробной функции гауссовского типа вполне оправдан. Другая проверка точности выбора пробной функции в (2.15) может быть проведена при переходе к нерелятивистскому пределу, который реализуется при  $\alpha_s$  и  $\Lambda = 0$ . В этом пределе уравнение БС переходит в уравнение Шредингера с потенциалом Кулона.

Для энергетического спектра орбитальных возбуждений в кулоновском потенциале имеем

$$M_\ell = 2m - \frac{\alpha^2}{2(\ell+1)^2} \frac{m}{2} K_\ell, \quad (3.14)$$

где  $K_\ell = 1$  в случае точного решения уравнения Шредингера.

В табл. 2 приведены результаты вычисления параметра  $K_\ell$  методом вариационной оценки нерелятивистского гамильтониана с гауссовской пробной функцией для различных орбитальных возбуждений  $\ell$ .

Таблица 2. Параметр  $K_\ell$

$\ell$	0	1	2	3	4	5
(BS)	0,948	0,953	0,9591	0,9646	0,9682	0,9722
(SE)	0,8494	0,9054	0,9312	0,9460	0,9556	0,9623

Из табл. 2 видно, что полученные результаты в рамках уравнений БС с пробной функцией гауссовского типа (3.8) согласуются с точными данными примерно с 5% точностью.

Таким образом, выбор пробной функции в форме (3.8) гарантирует описание масс связанных состояний как в релятивистском, так и в нерелятивистском случае лучше, чем с 5% точностью, что вполне удовлетворительно для поставленной нами задачи.

**4. Массы связанных состояний.** Вернемся к уравнению (3.4). Заметим, что в адронной физике параметр  $\nu = \frac{\Lambda}{m}$ , т.е. отношение шкалы

конфайнмента к массе конститuentных кварков, изменяется в интервале от 0,1 для тяжелых и до 15 для легких кварков.

Прежде всего, проанализируем принципиальную роль параметра  $\Lambda$ . При  $\Lambda=0$  наша модель называется моделью Вика-Кутковского. В этом случае безразмерной константой связи является  $\alpha_m$ . Существенно, что и в релятивистской модели ВК, и в нерелятивистском уравнении Шредингера масса стабильного связанного состояния меньше суммы масс конститuentных частиц  $M < 2m$ . При  $\alpha_m > 0$  уравнение БС для этой модели переходит в уравнение Шредингера и

$$M \sim 2m - \text{const } \alpha_m^2 \nu.$$

Если же  $\Lambda > 0$ , возможны стабильные связанные состояния с  $M > 2m$ .

На рис. 2 представлена зависимость константы связи  $\alpha_m$  от  $M/m$  при значениях  $\nu = \frac{\Lambda}{m} = 0, 0,5$  для основного состояния  $\ell = 0$ . Для сравнения

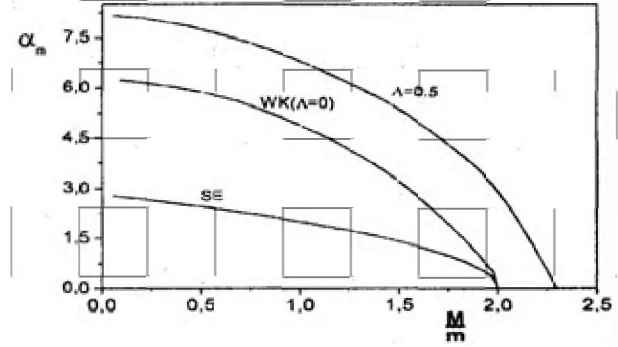


Рис. 2. Зависимость  $\alpha_m$  от  $M/m$  для  $\ell = 0$

при  $\nu=0$  приведена кривая, вычисленная в нерелятивистском пределе с помощью УШ. Из рисунка видно, что нерелятивистское описание в рамках УШ совпадает с релятивистским в модели ВК только при очень малых константах связи  $\alpha_m \sim 10^{-2+3}$  и  $2m - M \ll m$ , причем масса стабильного связанного состояния не может быть больше  $2m$ . При  $\alpha_m \sim 1$ , что соответствует реальной физике адронов, релятивистское и нерелятивистское описания резко различаются. Кроме того, только при наличии конфайнмента  $\Lambda > 0$  масса связанного состояния может быть больше, чем суммарная масса конститuentных кварков.

Следует подчеркнуть, что модель ВК [10], рассматривающая взаимодействие двух скалярных частиц посредством скалярного бозона в лестничном приближении, достаточно хорошо известна [13]. Модель уникальна тем, что, будучи полностью релятивистской квантовой задачей двух тел, она является аналитически исследуемой задачей и, конечно, идеально подходит для изучения различных свойств системы двух частиц. Однако модель ВК описывает динамику связанных состояний с массой меньше, чем суммарная масса составляющих частиц, т.е.  $M \leq 2m$ . Из эксперимента [14] известно, что массы мезонов, состоящие как из легких, так и из тяжелых кварков, больше, чем суммарная масса составляющих кварков. Таким образом, описание массового спектра мезонов, состоящего из как легких, так и тяжелых кварков, в рамках модели ВК и УШ невозможно. Эти проблемы решаются только в рамках уравнений БС с аналитическим конфайнментом.

Рассмотрим теперь задачу, имитирующую ситуацию в адронной физике. Именно имеются набор кварков, массы которых сильно различаются, и единая шкала конфайнмента  $\Lambda$ . Если мы

к тому же считаем константу связи “кварк-глюонного” взаимодействия одинаковой или мало меняющейся для всех сортов “кварков”, то тогда в качестве безразмерной константы связи в нашей модели следует считать  $\alpha_s$ , который представлен в (2.5) На рис. 3 показана зависимость массы связанного состояния  $\frac{M_0}{2m} (\ell = 0)$  от  $v = \frac{\Lambda}{m}$  при значениях константы связи  $\alpha_s = 0,1; 0,5; 1$  для основного состояния. В случае легких кварков  $v \sim 0,5 \div 1$  масса связанного состояния заметно больше суммы масс конститuentных частиц  $\frac{M_0}{2m} > 1$  и тем больше, чем меньше масса кварка.

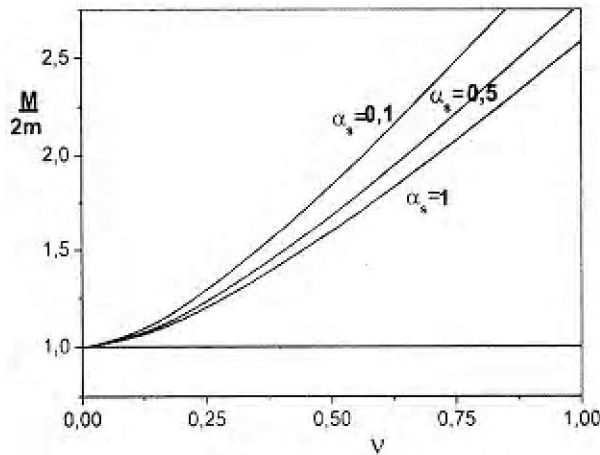


Рис. 3. Зависимость  $M/2m$  от  $v$  для  $\ell = 0$

Для тяжелых кварков ( $c$  и  $b$ ), когда  $v \ll 1$ , зависимость массы от константы связи определяется следующим образом:

$$M_0 = 2m \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{m^2} \ln \left( \frac{1}{\alpha_s} \frac{m}{\Lambda} \right) \right).$$

Итак, в условиях аналитического конфайнмента, во-первых, всегда масса связанного состояния больше суммы масс конститuentных кварков  $M_0 > 2m$ , что согласуется с имеющимися экспериментальными данными, и, во-вторых, масса связанного состояния тем больше, чем меньше константа связи.

Другой важной характеристикой адронного спектра является зависимость масс связанных состояний от орбитального числа  $\ell$ , т.е. траектории Редже. На рис. 4 представлена зависимость квадрата массового спектра связанного состояния в единицах  $\Lambda^2$ :

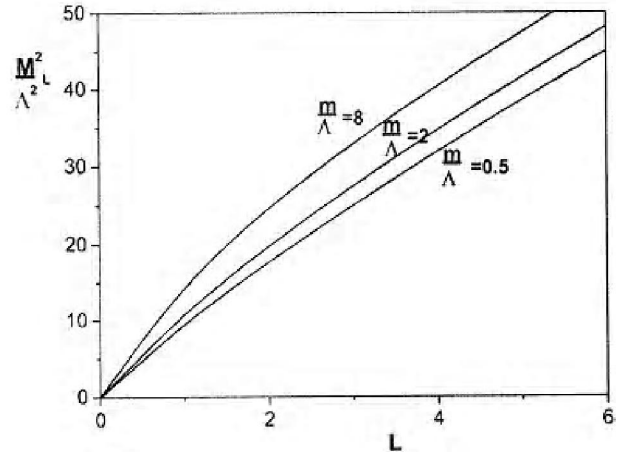


Рис. 4. Зависимость  $M$  от орбитального квантового числа для  $\alpha_s=0,5$  при различных значениях массы составляющих частиц

$$\frac{\tilde{M}_\ell^2}{\Lambda^2} = \frac{M_\ell^2}{\Lambda^2} - \frac{M_0^2}{\Lambda^2}$$

при  $\alpha_s=0,5$  от орбитального квантового числа  $\ell$  для различных значений масс кварков  $\frac{m}{\Lambda}$ . Видно, что траектории Редже двухчастичных связанных состояний нелинейны при малых  $\ell$  и выходят на линейные при  $\ell > 2 \div 3$ . Кроме того, наклон траектории Редже при возрастании массы конститuentных частиц увеличивается. Это поведение траектории Редже согласуется с экспериментальными данными (см., например, [16]).

**5. Абнормальные состояния.** В настоящий момент экспериментально обнаружено [14] существование огромного количества экзотических мезонов с массами от 1 до 2,5 ГэВ. Эти экзотические состояния рассматриваются как кварк-глюонные гибриды или четырехкварковые молекулы. Однако при таком рассмотрении не удастся классификация этих мезонов единым образом. Механизм формирования экзотических мезонов, конечно, определяется в рамках КХД, который построен в четырехмерном пространстве  $R^4$ . Поэтому волновая функция, описывающая релятивистскую частицу и являющаяся решением уравнения БС совместно орбитального  $\ell$ , азимутального  $m$  и радиального  $n$  квантовых чисел, которые связаны с трехмерным пространством  $R^3$ , для своего описания требует введения дополнительного квантового числа, связанного с четвертой временной степенью свободы  $t$  в пространстве Минковского или  $y_4$  в пространстве Евклида. Такое квантовое число обозначается  $k$ .

В нерелятивистском пределе выживают только состояния с  $\kappa=0$ , но в релятивистском случае существуют состояния с  $\kappa \geq 1$ , которые называются “абнормальными” (abnormal) состояниями.

Нужно заметить, что эти состояния еще не изучены должным образом. Поскольку абнормальные состояния отсутствуют в нерелятивистской классификации мезонных состояний, то считается, что их и не должно быть вообще и следует вводить дополнительные условия, запрещающие их возникновение. Однако предпринимаются попытки (см. [17]) объяснить  $J^{PC}$ -экзотические состояния мезонов не как гибриды или четырехкварковые состояния, а как абнормальные решения уравнения БС. Поэтому представляет интерес посмотреть, как зависит спектр абнормальных состояний от параметров теории и как исчезают эти состояния в нерелятивистском пределе.

В нашей модели токи с квантовыми числами  $\ell, m, n$  и  $\kappa$  представлены в (2.8) и классифицируются следующим образом:

$$J^{PC} = \ell^{(-1)^\ell, (-1)^{\ell+\kappa}}, \quad P = (-1)^\ell, \quad C = (-1)^{\ell+\kappa}.$$

В табл. 3 приведены токи с низшими орбитальными моментами. В нерелятивистском пределе учитывается, что

$$E_1 = E_2, \quad E_j = \sqrt{m^2 + \vec{p}_j^2}, \quad \vec{p}_1 = -\vec{p}_2.$$

Таблица 3. Токи с низшими орбитальными возбуждениями в релятивистском и нерелятивистском пределах

$J^{PC}$	Ток	Нерелятивистский предел
$0^{++}$	$\Phi^+(x)\Phi(x)$	$u_a(p_1)u(p_2)$
$1^{--}$	$\Phi^+(x)\vec{\nabla}_x\Phi(x)$	$u_a(p_1)(p_1-p_2)u(p_2)$
$0^{+-}$	$\Phi^+(x)\vec{\nabla}_{x_a}\Phi(x)$	$u_a(p_1)(E_1-E_2)u(p_2)=0$
$2^{++}$	$\Phi^+(x)Y_{2m}(\vec{\nabla}_x)\Phi(x)$	$u_a(p_1)Y_{2m}(p_1-p_2)u(p_2)=0$
$1^{+-}$	$\Phi^+(x)Y_{4m}(\vec{\nabla}_x)\vec{\nabla}_{x_a}\Phi(x)$	$u_a(p_1)Y_{4m}(p_1-p_2) \times (E_1-E_2)u(p_2)=0$
$0^{++}$	$\Phi^+(x)(\vec{\nabla}_{x_a})^2\Phi(x)$	$u_a(p_1)(E_1-E_2)^2u(p_2)=0$

Волновая функция с  $\kappa=1, 2, \dots$  и удовлетворяющая условию ортонормированности представлена в (3.3). При выборе радиальной части волновой функции в виде гауссовской экспоненты (3.6) полином  $H_\kappa(z)$  является полиномом Эрмита. Выпишем формулы, определяющие массу абнормального состояния с произвольным  $\kappa$ .

Для абнормального состояния  $\kappa=1$  после некоторых упрощений имеем

$$\tilde{B}^a_{\ell,1}(M) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \max_{a,b} \frac{R_{\ell,1}(a,b)}{N_{\ell,1}(a,b)}, \quad (5.1)$$

где

$$N_{\ell,1}(a,b) = \int_0^1 \frac{ds s^{\ell+1}}{(1+2bs)^{3/2}(1+2as)^{\ell+3/2}} \quad (5.2)$$

и

$$R_\ell(a,b) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{ds_1 ds_2 (s_1 s_2)^{\ell+1}}{[(1+bs_1)(1+bs_2)]^{3/2}} \times \frac{1}{[(1+as_1)(1+as_2)]^{\ell+3/2}} \times \int_0^1 du \left\{ \frac{u \exp\left(-e \frac{um^2}{\Lambda^2}\right)}{[u + \sigma(s_1, s_2, b)]^{3/2}} \times \frac{\exp\left(-\frac{M^2}{8\Lambda^2} \cdot \frac{u^2}{[u + \sigma(s_1, s_2, b)]}\right)}{[u + \sigma(s_1, s_2, a)]^{\ell+3/2}} + \frac{(1-u) \exp\left(-e \frac{(1+u)m^2}{\Lambda^2}\right)}{[1+u + \sigma(s_1, s_2, b)]^{3/2}} \left( \frac{M^2}{8\Lambda^2} \cdot \frac{(1-u)^2}{[1+u + \sigma(s_1, s_2, b)]} \right) \right\}. \quad (5.3)$$

Здесь  $e$  приведено в (3.12) и введены обозначения:

$$\sigma(u, s_1, s_2, A) = \frac{s_1}{1+As_1} + \frac{s_2}{1+As_2}, \quad A = a, b. \quad (5.4)$$

Численные вычисления были сделаны при  $\alpha_s = 0,5$  для “нормальных”  $0^{++}, 1^{--}$  и  $2^{++}$  и абнормальных  $0^{+-}$  и  $1^{+-}$  состояний. Результаты вычислений представлены на рис. 5. Качественная картина следующая. Для тяжелых кварков массы абнормальных состояний существенно больше нормальных. Для всех сортов кварков ( $v = \frac{\Lambda}{m} = 0,1 \div 1$ ) абнормальные мезоны тяжелее, чем нормальные. В частности, результаты численных вычислений показали, что для массы  $M_{\ell,k}$  связанного состояния уместно соотношение

$$M_{1,0}(J^{PC} = 1^-) < M_{1,0}(J^{PC} = 0^{+-});$$

$$M_{2,0}(J^{PC} = 2^{++}) < M_{1,1}(J^{PC} = 1^{+-}).$$

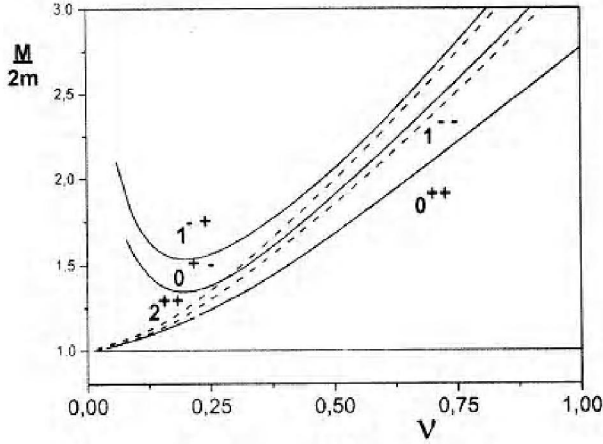


Рис. 5. Зависимость  $\frac{M}{2m}$  от  $\nu = \frac{\Lambda}{m}$  при  $\alpha_s = 0,5$  для абнормального и орбитального возбужденного состояния

Этот вывод, по-видимому, согласуется с экспериментальными данными. Таким образом, мезоны с “экзотическими” квантовыми числами вполне могут быть абнормальными состояниями или “временными” возбуждениями.

Таким образом, наши результаты установили, что токи для состояния с абнормальным возбуждением при переходе в нерелятивистский предел тождественно равны нулю, а масса в этом пределе становится бесконечной. Поэтому в нерелятивистской классификации состояние с абнормальным возбуждением отсутствует.

**6. Заключение.** Таким образом, аналитический конфайнмент дает простое описание явления конфайнмента.

Принципиальная роль параметра  $A$ , определяющего аналитический конфайнмент, состоит в том, что при  $A > 0$  возможны стабильные связанные состояния с массами, большими суммы массы конституэнтных кварков  $M > 2m$ . Кроме того, масса связанного состояния тем больше, чем меньше константа связи.

Траектории Редже двухчастичных связанных состояний слабо нелинейны при малых  $\ell$  и выходят на линейные при  $\ell > 2 \div 3$ . Кроме того, наклон траектории Редже при возрастании массы конституэнтных частиц уменьшается, что согласуется с экспериментальными данными.

В теории с аналитическим конфайнментом существуют стабильные “абнормальные” (abnormal) состояния, связанные с четвертой временной степенью свободы  $y_4$  в пространстве Евклида.

Оказалось, что для всех сортов кварков абнормальные мезоны тяжелее нормальных. Возможно, что  $J^{PC}$ -экзотические состояния мезонов описываются абнормальными решениями уравнения БС, а не являются гибридами или четырехкварковыми состояниями.

Таким образом, динамически аналитический конфайнмент плюс малая константа приводят к чертам спектра связанных состояний, присущих спектру мезонов.

**Приложение.** При вычислении трехмерных интегралов со сферическими функциями удобно перейти к интегрированию по  $d=3+2l$ -мерному вспомогательному пространству. Имеет место равенство

$$\int d\vec{y} \cdot Y_{\ell m}(\vec{y}) e^{i(\vec{k}\vec{y})} \Psi(\vec{y}^2) = Y_{\ell m}(\vec{k}) I_{\ell}(\vec{k}^2); \vec{y} \in \vec{R}^3. \quad (\text{П.1})$$

Здесь  $Y_{\ell m}(\vec{n}_y)$  – стандартная сферическая функция, удовлетворяющая соотношениям:

$$\int d\vec{n} \cdot Y_{\ell m}^*(\vec{n}) \cdot Y_{\ell' m'}(\vec{n}) = \delta_{\ell m} \delta_{m m'}; \quad (\text{П.2})$$

$$\sum_{m=-1}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vec{n}_x) \cdot Y_{\ell m}(\vec{n}_y) = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_{\ell}(\cos\theta);$$

$$(\vec{n}_x \vec{n}_y) = \cos\theta.$$

Используя (П.1) и (П.2), имеем

$$k^{2\ell} I_{\ell}(k^2) = 2\pi \int_0^{\infty} dy \cdot y^{2+\ell} k^{\ell} \cdot \int_{-1}^1 dt P_{\ell}(t) e^{iky\ell} \cdot \Phi(y^2),$$

$$k = |\vec{k}|, \quad y = |\vec{y}|, \quad (\text{П.3})$$

$$I_{\ell}(k^2) = (2\pi)^{3/2} \int_0^{\infty} dy \cdot y^{d-1} \cdot \frac{J_{d/2-1}(ky)}{(ky)^{d/2-1}} \cdot \Phi(y^2) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{d-3} \int d^d y \cdot e^{i(ky)} \cdot \Phi(y^2), \quad (\text{П.4})$$

т.е. интеграл берется по пространству  $\vec{R}^d$  при  $d=3+2\ell$ . Здесь  $J_{\nu}(z)$  – функция Бесселя, тогда исходный интеграл (П.1) записывается

$$\begin{aligned} & \int d\vec{y} \cdot Y_{\ell m}(\vec{y}) \cdot e^{i(\vec{k}\vec{y})} \cdot \Phi(\vec{y}^2) = \\ & = \frac{Y_{\ell m}(\vec{k})}{(2\pi)^2} \int d^d y \cdot e^{i(ky)} \cdot \Phi(y^2). \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} S_{\ell} = & \iint d\vec{y}_1 d\vec{y}_2 Y_{\ell m}^*(\vec{y}_1) \cdot \Phi(\vec{y}_1^2) \times \\ & \times K(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) \cdot \Phi(\vec{y}_2^2) \cdot Y_{\ell m}(\vec{y}_2), \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$



где

$$K(y_1 + y_2) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{K}(k^2) \cdot e^{i(k(y_1 + y_2))}. \quad (\text{П.7})$$

С учетом (П.2), (П.5) и (П.7) из (П.6) после некоторых упрощений получаем

$$S_\ell = \frac{2\Gamma(d/2)}{\pi^{d/2-1}} \times \int \int d^d y_1 d^d y_2 \cdot \Phi^*(y_1^2) \cdot K_d(y_1 + y_2) \cdot \Phi_\ell(y_2^2), \quad (\text{П.8})$$

где

$$K_d(y_1 + y_2) = \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \tilde{K}_d(k^2) \cdot e^{i(k(y_1 + y_2))}, \quad (\text{П.9})$$

Соотношения (П.7) и (П.10) осуществляют переход от интегрирования по пространству  $\bar{R}^3$  к интегрированию по  $d=(3+2\ell)$ -мерному пространству  $\bar{R}^d$ . Таким образом, орбитальное квантовое число  $\ell$  формально может быть поглощено в размерность вспомогательного пространства.

Вектор  $Y$  в пространстве  $\bar{R}^{d+1}$  определяется следующим образом:

$$Y = (y, u), \quad y \in R^d, \quad u \in R^1, \\ Y^2 = y^2 + u^2; \quad dY = d^d y du. \quad (\text{П.10})$$

Полученные формулы позволяют записать матричные элементы  $(\Psi_\ell D \Psi_\ell)$  и  $(\Psi_\ell D \Pi D \Psi_\ell)$  в виде

$$(\Psi_\ell D \Psi_\ell) = \int dY \Psi_\ell(Y) D(Y) \Psi_\ell(Y) \\ = \int d^d y \int d^1 u e^{-\frac{\Lambda^2}{2}(2ay^2 + 2bu^2)} \frac{\Lambda^2}{8\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \cdot e^{-\frac{\Lambda^2(y^2 + u^2)}{2s}}. \quad (\text{П.11})$$

После интегрирования по  $d^d y$  и  $du$  окончательно получим

$$(\Psi_\ell D \Psi_\ell) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{2\pi}{\Lambda} \right)^{\ell+1} \cdot N_\ell(a, b), \quad (\text{П.12})$$

где  $N_\ell(a, b)$  представлена (3.17).

Далее имеем

$$W_\ell = (\Psi_\ell D \Pi D \Psi_\ell) = \int \int dY_1 dY_2 \Psi_\ell(Y_1) D(Y_1) \Pi_p(Y_1 + Y_2) D(Y_2) \Psi_\ell(Y_2),$$

где

$$\Pi_p(Y_1 + Y_2) = \int \frac{dK}{(2\pi)^{d+1}} \cdot e^{iK(Y_1 + Y_2)} \cdot \tilde{\Pi}_p(K). \quad (\text{П.14})$$

Здесь

$$\tilde{\Pi}_p(K) = g^2 \tilde{S}(K + \frac{P}{2}) \cdot \tilde{S}(K - \frac{P}{2}), \quad (\text{П.15})$$

где  $p = (\vec{p}, p_4) \rightarrow P = (0, iM) \in \bar{R}^{d+1}$  и  $M$  – масса связанного состояния. После некоторых упрощений имеем

$$\tilde{\Pi}_p(K) = \frac{g^2}{2(2\Lambda^2)^2} \int_0^1 du \times \quad (\text{П.16})$$

$$\times \int_0^1 du \cdot \left\{ \begin{array}{l} u \exp\left(-\gamma - i \frac{Mk_4}{2\Lambda} uv\right) \\ + (1-u) \exp\left(-\gamma(1+u) - i \frac{Mk_4}{2\Lambda}(1-u)v\right) \end{array} \right\},$$

где введено обозначение

$$\gamma = \frac{1}{2\Lambda^2} \left[ k^2 + k_4^2 + m^2 - \frac{M^2}{4} \right].$$

Выделим в  $W_\ell$  вершинную часть

$$W_\ell = \int \frac{dK}{(2\pi)^{d+1}} \cdot \tilde{\Phi}_\ell^2(K^2) \tilde{\Pi}_p(K) = \\ = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int \frac{dk_4}{2\pi} \tilde{\Phi}_\ell^2(k^2, k_4^2) \tilde{\Pi}_p(k^2, k_4^2), \quad (\text{П.17})$$

где  $\tilde{\Phi}_\ell(K)$  – вершинная функция в импульсном пространстве:

$$\Psi_\ell(K) = \int dY \Psi_\ell(Y) D(Y) e^{iKY} = \\ = \int d^d y \int d^1 u e^{-\frac{\Lambda^2}{2}(ay^2 + bu^2)} \frac{\Lambda^2}{8\pi} \int_1^\infty dv \cdot e^{-\frac{\Lambda^2(y^2 + u^2)}{2}} v e^{i(ky + k_4 u)} = \\ = \frac{\Lambda^2}{8\pi} \left( \frac{2\pi}{\Lambda^2} \right)^{\ell+2} \int_1^\infty \frac{dv}{\sqrt{v+b}(v+a)} d/2 \cdot e^{-\frac{1}{2\Lambda^2} \left[ \frac{k^2}{a+v} + \frac{k_4^2}{b+v} \right]}.$$

Учитывая (A.16) и (A.18) и проводя интегрирования по  $d^d k$  и  $dk_4$  из (3.17), окончательно получим

$$W_\ell = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{2\pi}{\Lambda^2} \right)^{\ell+1} R_\ell(a, b), \quad (\text{П.19})$$

где  $R_\ell(a, b)$  представлена в (3.19).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Swan E.S. Aspects of Confinement // A Brif Review, arXiv: hep-ph/0310089(2003).
2. Flamm D., Schoeberl F. Introduction to the Quark Model of Elementary Particles // Cordon & Breach Science Publ. N.Y., 1982.

3. *Feldmann Th.* // Int. J. of Mod. Phys. A15, 159 (2000).
4. *Efimov G.V., Nedelko S.N.* // Phys. Rev. D51, 176 (1995); Phys. Rev. D54, 4483 (1996).
5. *Burdenov Ya.V., Efimov G.V.* // Phys. Rev. D64, 014001 (2001).
6. *Efimov G.V., Ivanov M.A.* // The Quark Confinement Model of Hadrons, IOP Publishing Ltd, Bristol and Philadelphia, 1993.
7. *Efimov G.V., Ganbold G.* // Phys. Rev. D65, 054012 (2002);  
*Efimov G.V.*, Fluctuating paths and fields, p. 225-234, world scientific publishing, 2001.
8. *Ефимов Г.В.* // Теор. мат. физ. 141, 80(2004).
9. *Efimov G.V.* // Few-Body Systems. 33, 199 (2003).
10. *Wick G.C.* // Phys. Rev. 96, 1124 (1954); *Cutkosky R.E.* // Phys. Rev. 96, 1135 (1954).
11. *Nieuwenhuis T., Tjon J.A.* // Few-Body Systems. 21, 167 (1996).
12. *Hwang D.S., Karmanov V.A.* // Nucl. Phys. B696. P. 413(2004).
13. *Nakanish N.* // Prog. theor. phys. Supplement 95. P. 1-23(1988)
14. *Hagiwara K. et al.* // Phys. Rev. D66, 010001(2002).
15. *Eichten E. et al.* // Phys. Rev. Lett., 30, 369(1975); *Quigg C., Rosne J.L.* // Phys. Rep. 59, 167(1979); *Быков А.А., Дремин И.М., Леонидов А.В.* // УФН. 143, (1984).
16. *Tang A., Norbury J.W.* // Phys. Rev. D62, 016006(2000).

17. *Burden C.J., Burden M.A.* // Pichovsky, Few Body Syst. bf 32, (2002), 119.

### Резюме

Қарапайым Юкава моделінде, аналитикалық туралы болжамы, (бөлшектің пропагаторлары бүтін гаусс тектес аналитикалық функциялар болып табылады) оған қоса Бете–Солпитер теңдеуі жеңіл және ауыр мезондардың спектрінің негізгі қасиеттерін: конституэнттік бөлшектер массаларының қосындысынан артық массасы бар тұрақты байланысқан күйдің болуын түсіндіреді. Орбиталдық және абнормалды қозған күйдің массалық спектрінің конфайменттік өлшемінен тәуелділігі анықталды.

### Summary

In the framework simple Yukawa model, starting by the suppose of the analytical confinement, (the propagators of particles are entire analytical function of the Gaussian type) and the Bethe-Salpeter equations can be explained the main characteristics of light and heavy mesons, and existents of bound state with the mass more than the sum of mass constituent particles. The depends of the mass spectrum orbital and abnormal excited states from the scale of confinement.

КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы;

ТарГПИ, г. Тараз

Поступила 13.03.06г.