УДК 517.956

С. А. АЛДАШЕВ

КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДАРБУ–ПРОТТЕРА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В работе получен критерий однозначной разрешимости задачи Дарбу–Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений.

Пусть D_ε – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная поверхностями $|x|=\frac{2}{2+p}t^{(2+p)/2}+\varepsilon$, $|x|=1-\frac{2}{2+p}t^{(2+p)/2}$ и плоскостью $t=0$, где $|x|$ – длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$, $0\le t\le\left(\frac{(2+p)(1-\varepsilon)}{4}\right)^{\frac{2}{2+p}}$, а $0\le\varepsilon<1$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_ε области D_ε, обозначим через S_ε, S_1 и S соответственно.

В области D_ε рассмотрим вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения

$$t^p\Delta_x u-u_{tt}+\sum_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u_t+c(x,t)u=0, \tag{1}$$

где $p=\mathrm{const}>0$, Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m\ge 2$.

Рассмотрим следующую задачу Дарбу–Проттера для уравнения (1).

Задача 1. Найти в области D_ε решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D_\varepsilon})\cap C^2(D_\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_t|_s=\nu(x),\ u|_{s_\varepsilon}=\sigma_\varepsilon(x) \tag{2}$$

или

$$u|_s=\tau(x),\ u|_{s_\varepsilon}=\sigma_\varepsilon(x). \tag{3}$$

Перейдем от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, сохранив обозначения, использованные в [1].

Пусть Ω_ε – проекция области D_ε на плоскость (r,t) с границами

$$\Gamma_\varepsilon: r=\frac{2}{2+p}t^{(2+p)/2}+\varepsilon,$$

$$\Gamma_1:\ r=1-\frac{2}{2+p}t^{(2+p)/2} \text{ и } \Gamma: t=0, \varepsilon\le r\le 1;$$

$\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1\le k\le k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2), \theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$, $W_2^l(D_\varepsilon), l=0,1,...$ – пространства Соболева, а $\tilde S=\{(r,\theta)\in S, \varepsilon<r<(1+\varepsilon)/2\}$.

Через $\tilde a_{in}^k(r,t)$, $\hat a_{in}^k(r,t)$, $\tilde b_n^k(r,t)$, $\tilde c_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\bar\nu_n^k(r)$, $\bar\sigma_{\varepsilon n}^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда по сферическим функциям $Y_{n,m}^k(\theta)$ соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\cdot\rho(\theta)$, $a_i\frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma_\varepsilon(r,\theta)$, $i=1,...,m$, причем $\rho(\theta)\in C^\infty(S)$.

Введем множество функций

$$\mathrm{B}_1^l(S)=\Big\{f(r,\theta): f\in W_2^l(S), \sum_{n=0}^\infty\sum_{k=1}^{k_n}\Big(\|f_n^k(r)\|^2_{C^3((\varepsilon,1))}+\|f_n^k(r)\|^2_{C^1([\varepsilon,1])}\Big)\exp 2(n^2+n(m-2))<\infty, l\ge m-1\Big\}.$$

Если $a_i(x,t), b(x,t), c(x,t) \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $i=1,\dots,m, l \ge m+1$ и $\tau(r,\theta)=r^3\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)=r^3\nu^*(r,\theta)$, $\sigma_\varepsilon(r,\theta)=r^2\sigma_\varepsilon^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta)$, $\nu^*(r,\theta)\in B_1^l(S)$, $\sigma^*(r,\theta)\in B_1^l(\widetilde{S})$, то имеет место

Теорема. Задача 1 однозначно разрешима $\Leftrightarrow \varepsilon > 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В [2, 3] получен следующий критерий единственности решения: решения однородной задачи, соответствующей задаче 1 $u(x,t)\equiv 0 \Leftrightarrow \varepsilon > 0$.

Теперь покажем разрешимость задачи 1. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Ее решение в сферических координатах будем искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (4)$$

где $\bar u_n^k(r,t)$ – функции, которые будут определены ниже.

Подставив (4) в (1), аналогично [1] получим уравнения вида

$$t^p\rho_0^1\bar u_{0rr}^1-\rho_0^1\bar u_{0tt}^1+\left(\frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1+\sum_{i=1}^m\hat a_{i0}^1\right)\bar u_{0r}^1+$$
$$+\tilde b_0^1\bar u_{0t}^1+\tilde c_0^1\bar u_0^1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\Big\{t^p\rho_n^k\bar u_{nrr}^k-\rho_n^k u_{ntt}^k+$$
$$+\left(\frac{m-1}{r}t^p\rho_n^k+\sum_{i=1}^m\hat a_{in}^k\right)\bar u_{nr}^k+\tilde b_n^k\bar u_{nt}^k+$$
$$+\left[\tilde c_n^k-\frac{\lambda_n}{t^p}\rho_n^k t^p+\sum_{i=1}^m\left(\tilde a_{in-1}^k-n\hat a_{in}^k\right)\right]\bar u_n^k\Big\}=0,$$
$$\lambda_n=n(n+m-2). \qquad (5)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$t^p\rho_0^1\bar u_{0rr}^1-\rho_0^1u_{0tt}^1+\frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1\bar u_{0r}^1=0, \qquad (6)$$

$$t^p\rho_1^k\bar u_{1rr}^k-\rho_1^k u_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}t^p\rho_1^k\bar u_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}t^p\rho_1^k u_1^k=$$
$$=-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m\hat a_{i0}^1\bar u_{0r}^1+\tilde b_0^1u_{0t}^1+\tilde c_0^1\bar u_0^1\right),$$
$$n=1,\ k=\overline{1,k_1}, \qquad (7)$$
$$t^p\rho_n^k\bar u_{nrr}^k-\rho_n^k\bar u_{ntt}^k+$$
$$+\frac{m-1}{r}t^p\rho_n^k\bar u_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}t^p\rho_n^k\bar u_n^k=$$
$$=-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\Big\{\sum_{i=1}^{m-1}\hat a_{in-1}^k\bar u_{n-1r}^k+\tilde b_{n-1}^k+$$
$$\left[\tilde c_{n-1}^k+\sum_{i=1}^m\left(\tilde a_{in-2}^k-(n-1)\hat a_{in-1}^k\right)\right]\bar u_{n-1}^k\Big\},$$
$$k=\overline{1,k_n},\ n=2,3,\dots.$$

Нетрудно показать, что если $\{\bar u_n^k\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots$ – решение системы (6), (7), то оно является и решением уравнения (5).

С учетом ортогональности сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([4]) из краевого условия (2) имеем

$$\bar u_{nt}^k\big|_{\Gamma}=\bar\nu_n^k(r),\ \bar u_n^k\big|_{\Gamma_\varepsilon}=\bar\sigma_{\varepsilon n}^k(r),$$
$$k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots. \qquad (8)$$

Таким образом, задача (1), (2) сведена к системе задач Дарбу в области Ω_ε для уравнений (6), (7). Теперь будем находить решения этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (6), (7) можно представить в виде

$$t^p\bar u_{nrr}^k-\bar u_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}t^p\bar u_{nr}^k+\frac{\lambda_n}{r^2}t^p\bar u_n^k=f_n^k(r,t), \qquad (9)$$

где $f_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r,t)\equiv 0$. Произведя в (9) замену переменных $\bar u_n^k(r,t)=r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)$ и положив затем $r=r$, $x_0=\frac{2}{2+p}t^{(2+p)/2}$, получим уравнение

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^k\equiv u_{\alpha,nrr}^k-u_{\alpha,nx_0x_0}^k-\frac{\alpha}{x_0}u_{\alpha,nx_0}^k+$$
$$+\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4r^2}u_{\alpha,n}^k=f_{\alpha,n}^k(r,x_0), \qquad (10)$$

$$0 < \alpha = \frac{p}{2+p} < 1,$$

$$f_{\alpha,n}^{k}(r,x_0) = r^{(m-1)/2}\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha} f_n^k\left[r,\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right].$$

При этом краевые условия (8) запишутся в виде

$$\lim_{x_0\to 0} x_0^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_0}u_{\alpha,n}^{k} = \nu_n^k(r),$$

$$u_{\alpha,n}^{k}(r,r-\varepsilon) = \sigma_{\varepsilon n}^{k}(r),$$

$$k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots, \tag{11}$$

$$\nu_n^k(r) = r^{(m-1)/2}\overline{\nu}_n^k(r),$$

$$\sigma_{\varepsilon n}^k(r) = r^{(m-1)/2}\overline{\sigma}_{\varepsilon n}^k(r).$$

Наряду с уравнением (10), рассмотрим уравнение

$$L_0 u_{0,n}^k \equiv u_{0,nrr}^k - u_{0,nx_0x_0}^k +$$

$$+\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4r^2}u_{0,n}^k = f_{0,n}^k(r,x_0). \tag{12}$$

Имеет место следующая функциональная связь, как доказано в [1], между решениями задачи Коши для уравнений (10) и (12).

Утверждение 1. Если $u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ – решение задачи Коши для уравнения (12), удовлетворяющее условию

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0) = \tau_n^k(r),\quad \frac{\partial}{\partial x_0}u_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \tag{13}$$

то функция

$$u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) = \gamma_\alpha\int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)\left(1-\xi^2\right)^{\alpha/2}d\xi \equiv$$

$$\equiv\frac{\gamma_\alpha}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)x_0^{1-\alpha}D_{0x_0^2}^{-\alpha/2}\left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{14}$$

при $\alpha > 0$ является решением уравнения (10) с условиями (13).

Утверждение 2. Если $u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ – решение задачи Коши для уравнения (12), удовлетворяющее условию

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0) = \frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\ldots(2q+1-\alpha)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}u_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \tag{15}$$

то при $0 < \alpha < 1$ функция

$$u_{0,n}^{k,2}(r,x_0) = \gamma_{2-k-2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q \times$$

$$\times\left[x_0^{1-\alpha+2q}\int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)\left(1-\xi^2\right)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right]\equiv$$

$$\equiv\gamma_{2-k+2q}2^{q-1}\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right)D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0}\right] \tag{16}$$

является решением уравнения (10) с начальными данными

$$u_{0,n}^{k,2}(r,0) = 0,\quad \lim_{x_0\to 0}x_0^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_0}u_{\alpha,n}^{k,2} = \nu_n^k(r), \tag{17}$$

где $\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha = 2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция, D_{0t}^{α} – оператор Римана–Лиувилля [5], а $q \ge 0$ – наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2-\alpha+2q \ge m-1$. При этом $f_{\alpha,n}^k(r,x_0)$, $f_{0,n}^k(r,x_0)$ связаны формулами (14) в случае утверждения 1 и (15) в случае утверждения 2.

Теперь будем решать задачу (10), (11). Ее решение ищем в виде $u_{\alpha,n}^k(r,x_0) = u_{\alpha,n}^{k,1} + u_{\alpha,n}^{k,2}$, где $u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ – решение задачи Коши (10), (17), а $u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ – решение задачи Дарбу для уравнения

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^{k,1} = 0 \tag{18}$$

с условием

$$\frac{\partial}{\partial x_0}u_{\alpha,n}^{k,1}(r,0) = 0, u_{\alpha,n}^{k,1}(r,r-\varepsilon) =$$

$$=\sigma_{\varepsilon n}^k(r) - u_{\alpha,n}^{k,2}(r,r-\varepsilon), \varepsilon \le r \le 1. \tag{19}$$

С учетом формул (14), (16), а также обратимости оператора D_{0t}^{α} ([5]), задачи (10), (17) и (18), (19) соответственно сводим к задаче (12), (15) и к задаче Дарбу для уравнения $L_0 u_{0,n}^{k,1} = 0$ с данными $\dfrac{\partial}{\partial x_0} u_{0,n}^{k,1}(r,0)=0, u_{0,n}^{k,1}(r,r-\varepsilon)=\varphi_{\varepsilon n}^{k}(r)$, которые однозначно разрешимы [1], где $\varphi_{\varepsilon n}^{k}(r)$ – функция, вырождающаяся через $\nu_n^k(r), \sigma_{\varepsilon n}^{k}(r)$.

Следовательно, с учетом утверждений 1 и 2 найдем последовательно однозначные решения задач (6), (8) и (7), (8).

Далее, как и в [1], доказывается, что функция (4) является решением задачи (1), (2), где $\overline{u}_n^k(r,t)$ определяются из двумерных задач Дарбу, причем принадлежит искомому классу.

Аналогично доказывается разрешимость задачи (1), (3).

Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь задача 1 однозначно разрешима. Покажем, что ε>0.

Предположим противное, т.е. ε=0. В этом случае в [6] показано, что задача 1 имеет бесчисленное множество решений. Приходим к противоречию.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Ғылым, 1994. 170 с.

2. *Алдашев С.А.* // Доклады НАН РК. 2002. №3. С. 5-8.

3. *Алдашев С.А.* // Украинский математический журнал. 2003. Т. 55, №11. С. 1569-1575.

4. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз. 1962. 254с.

5. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1985. 301 с.

6. *Нуржанов Ш.Т.* Задачи Дарбу-Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Алматы, 2000. 67 с.

Резюме

Жұмыста азғындалған көп өлшемді гиперболалық теңдеулерге арналған Дарбу-Проттер есебінің бір мәнді шешімі бар критерий алынған.

Summary

In the article a criterion of the unique solvability of Darbu-Protter problem for degenerative multidimensional hyperbolic equations is established.

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы

Поступила 02.02.2006 г.