УДК 517.5

М. Е. БЕРИКХАНОВА

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ПО ЗАДАННОМУ ЧИСЛУ ИНФОРМАЦИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ПОСРЕДСТВОМ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Рассмотрена задача дискретизаций решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге по всем линейным функционалам. Найден оптимальный порядок погрешности дискретизации и построен соответствующий оптимальный оператор дискретизации.

Приведем постановку общей задачи (в редакции из [1]) применительно к рассматриваемой в данной работе конкретизации).

Пусть $u(\alpha,\theta,f)$ есть решение уравнения Лапласа в полярных координатах (см. [2, с. 235])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(\alpha,\theta)\,|_{\alpha=R}=f(\theta) \qquad (2)$$

с правой частью f из некоторого класса F 2π-периодических функций.

Для каждого целого положительного N через $L_N\equiv\{(l^{(N)};\varphi_N)\}$ обозначим множество всевозможных пар $(l^{(N)};\varphi_N)$, где $l^{(N)}=(l_1,\ldots,l_N)$ есть набор линейных функционалов $l_j(\cdot): F\to C$ $(j=1,\ldots,N)$, функция $\varphi_N\equiv\varphi_N(\tau_1,\ldots,\tau_N;\alpha,\theta)$ действует из $C^N\times[0,R]\times[0,2\pi]$ в C, где C, как обычно, поле комплексных чисел. Также предположим, что при произвольных фиксированных $\tau_1,\ldots,\tau_N$; α функция φ_N, рассматриваемая как функция от θ, принадлежит $L\nu[0,2\pi]$.

Положим для $(l^{(N)};\varphi_N)\in\{(l^{(N)};\varphi_N)\}$

$$\delta_N((l^{(N)};\varphi_N);F)= \qquad (3)$$

$$=\sup_{f\in F}\sup_{0\le\alpha\le R}\left\|u(\alpha,\cdot,f)-\varphi_N\left(l_1(f),\ldots,l_N(f),\alpha,\cdot\right)\right\|_{L^\nu}$$

и

$$\delta_N(F)=\inf_{(l^{(N)};\varphi_N)\in L_N}\delta_N((l^{(N)};\varphi_N);F). \qquad (4)$$

Задача заключается в получении оценок сверху и снизу для величины (4) и в указании пары $(l^{(N)};\varphi_N)$, реализующей оценку сверху.

В данной статье в качестве класса F рассматривается класс Соболева $W_q^r(0,2\pi)$ (r – целое положительное число), определяемый следующим образом (см., напр., [1]):

$$f(\theta)\in W_q^r(0,2\pi)\overset{def}{\Leftrightarrow}\|f\|_{W_q^r(0,2\pi)}=$$

$$=\|f\|_{L_q(0,2\pi)}+\sum_{|s|=r}\left\|f^{(s)}\right\|_{L_q(0,2\pi)}\le 1$$

$$(r=1,2,\ldots),$$

и класс Бесова $B^r_{q,æ}(0,2\pi)$ $(r>0)$, определяемый следующим образом (см., напр., [1]):

$$f(\theta)\in B^r_{q,æ}(0,2\pi)\Leftrightarrow$$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow}\left\|\left\{2^{r\tau}\left\|\sum_{m\in\rho(\tau)}\hat{f}(m)e^{im\cdot}\right\|_{L^q}\right\}_{\tau=1}^{\infty}\right\|_{l^{æ}}\le 1,$$

где $\rho(\tau)=\{m\in Z: 2\tau^{-1}\le max\{1,|m|\}<2\tau\}$, $\|f\|_{L^q}$ – Лебегова норма со степенью суммируемости q функции f, заданной на $[0,2\pi]$, а $\left\|\{a_\tau\}_{\tau=1}^{\infty}\right\|_{l^{æ}}$ есть норма числовой последовательности $a=\{a_\tau\}_{\tau=1}^{\infty}$, определяемая как

$$\left\|\{a_\tau\}_{\tau=1}^{\infty}\right\|_{l^{æ}}=\begin{cases}\left(\sum_{\tau=1}^{\infty}|a_\tau|^{æ}\right)^{\frac{1}{æ}} & \text{при } 1\le æ<\infty;\\ \sup|a_\tau| & \text{при } æ=\infty.\end{cases}$$

По рассматриваемой задаче нами доказана следующая

Теорема. *Пусть даны числа* $2 \le q < \nu \le +\infty$.

а) Пусть $r > \frac{1}{q}$ – *целое положительное число. Тогда имеет место двусторонняя оценка*

$$\delta_N(L_N, W_q^r(0,2\pi))_{L^\nu[0,2\pi]} \text{фπ } N^{-\left(r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)\right)}.$$

б) *Пусть* $1 \le æ \le \infty$ и $r > \frac{1}{q}$. *Тогда имеет место двусторонняя оценка*

$$\delta_N(L_N, B_{q,æ}^r(0,2\pi))_{L^\nu[0,2\pi]} \text{фπ } N^{-\left(r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)\right)}.$$

При этом в каждом из случаев а) и в) оценку сверху реализует оператор

$$\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);\alpha,\theta) =$$

$$= V_{2^n}(\alpha,\theta;f) = \sum_{k=0}^{n} q_k(\alpha,\theta;f),$$

где [4, с. 295-300] $V_{2^k}(\alpha,\theta;f)$ – средние Валле–Пуссена функции u (α, θ, f) порядка 2^k по переменной θ, а $q_0 = V_{2^0}$, $q_k = V_{2^k} - V_{2^{k-1}}$, $k \ge 1$.

Вспомогательные леммы.

Лемма А ([3, с. 281]). *Пусть даны целое положительное число s, целое неотрицательное число l, положительное число r,* $1 \le p$, $\theta \le \infty$, *целое положительное* ρ *и пусть* $T\rho(x)$ *является тригонометрическим многочленом порядка не выше* ρ *по каждой из своих s переменных. Тогда верны соотношения*

$$\|T_\rho\|_{W_p^l} << \rho^l \|T_\rho\|_{L^p}, \quad \|T_\rho\|_{B_{p,\theta}^r} << \rho^r \|T_\rho\|_{L^p}.$$

Отметим, что константы в этих неравенствах не зависят от ρ.

Лемма В (см. [4]). *Пусть дано целое положительное число s. Тогда для каждого целого положительного N выполнено: для любой ортогональной на* $[0,1]^s$ *системы функций* $\psi \equiv \{\psi_k\}_{k=1}^{N'}$ *и для любого множества* $G \equiv \{m^{(1)},\dots,m^{(N')}\} \subset Z^s$ *таких, что* $N' = |G| \ge 3N$ *и* $|G|$ фπ N, *и для произвольных линейных функционалов* $l_1,\dots,l_N$, *определенных, по крайней мере, на множестве всех многочленов по системе* ψ *и на множестве всех тригонометрических многочленов со спектром в G, найдутся комплексные числа* $\{c_k\}_{k=1}^{N'}$, *удовлетворяющие условию* $\sum_{k=1}^{N'}|c_k| \ge N$, $\sum_{k=1}^{N'}|c_k|^2 = N$; *причем если* $\chi(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k e^{2\pi i (m^{(k)},x)}$, $k(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k \psi_k(x)$, *то*

$$l_1(\chi) = \dots = l_N(\chi) = l_1(k) = \dots = l_N(k) = 0, \qquad (5)$$

$$\|\chi\|_{L^\infty} \ge N \qquad (6)$$

$$\|\chi\|_{L^2} = N^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство теоремы. **Оценка сверху.** Поскольку верны вложения [3, с. 230]

$$W_q^r(0,2\pi) \subset H_q^r(0,2\pi), \quad B_{q,1}^r(0,2\pi) \subset$$
$$\subset B_{q,\infty}^r(0,2\pi) \equiv H_q^r(0,2\pi),$$

то в обоих случаях достаточно оценку сверху получить для класса $H_q^r(0,2\pi)$, а оценку снизу в пункте б) – для класса $B_{q,1}^r(0,2\pi)$.

Оценка сверху.

Пусть дано целое положительное число N и множество $I_\rho = [-\rho,\rho] \cap Z$. Без ограничения общности можно считать, что $N = |I_{2^n}|$ фπ 2^n. Определим линейные функционалы $l_1(f) = \hat{f}(m^{(1)}),\dots,l_N(f) = \hat{f}(m^{(N)})$, где $\{m^{(1)},\dots,m^{(N)}\}$ есть некоторое упорядочение множества I_{2^n}. Функцию $\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_N;\alpha,\theta)$ определим таким образом, чтобы для каждой функции $g \in L^1(0,2\pi)$ было выполнено равенство

$$\varphi_N(l_1(g),\dots,l_N(g);$$

$$\alpha,\theta) = V_{2^n}(\alpha,\theta;g) = \sum_{k=0}^{n} q_k(\alpha,\theta;g),$$

где [3, с. 295-300] $V_{2^k}(\alpha,\theta;g)$ – средние Валле–Пуссена функции u (α, θ, f) порядка 2^k по переменной θ, а $q_0 = V_{2^0}$, $q_k = V_{2^k} - V_{2^{k-1}}$, $k \ge 1$.

Покажем, что если $f \in H_q^r(0,2\pi)$, то при любом $\alpha \in [0, R]$ решение u (α, θ, f), рассматриваемое как функция от θ, принадлежит $H_q^r(0,2\pi)$.

При $\alpha = R$ имеем $u(R,\theta,f) = f(\theta) \in H_q^r(0,2\pi)$.

Пусть теперь $\alpha \in [0, R)$. Решение задачи (1) – (2) имеет вид

$$u(\alpha,\theta,f) = \sum_{m\in Z}\left(\tfrac{\alpha}{R}\right)^{|m|}\hat{f}(m)e^{im\theta}.$$

Обозначим $G(\alpha,\theta) = \sum_{m\in Z}\left(\tfrac{\alpha}{R}\right)^{|m|}e^{im\theta}$.

Тогда

$$u(\alpha,\theta,f) = \sum_{m\in Z}\left(\tfrac{\alpha}{R}\right)^{|m|}e^{im\theta}\hat{f}(m) =$$

$$= \sum_{m\in Z}\left(\tfrac{\alpha}{R}\right)^{|m|}e^{im\theta}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)e^{-im\xi}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m\in Z}\left(\tfrac{\alpha}{R}\right)^{|m|}f(\xi)e^{-im(\theta-\xi)}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(\alpha,\theta-\xi)f(\xi)d\xi =$$

Сделав замену $\theta - \xi = \zeta$, получим

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_\theta^{\theta-2\pi}G(\alpha,\zeta)f(\theta-\zeta)d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(\alpha,\zeta)f(\theta-\zeta)d\zeta.$$

Пусть $k > r$. Вычислим норму k-й разности по переменной θ.

$$\left\|\Delta_h^k u(\alpha,\theta,f)\right\|_{L^q(0,2\pi)} =$$

$$= \left\|\Delta_h^k\left(\int_0^{2\pi}G(\alpha,\zeta)f(\theta-\zeta)d\zeta\right)\right\|_{L^q(0,2\pi)} =$$

$$= \left\|\int_0^{2\pi}G(\alpha,\zeta)\Delta_h^k f(\theta-\zeta)d\zeta\right\|_{L^q(0,2\pi)} =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}G(\alpha,\zeta)\Delta_h^k f(\theta-\zeta)d\zeta\right|^q d\theta\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, а также, учитывая, что $G(\alpha,\zeta) \ge 0$ и $\int_0^{2\pi}G(\alpha,\zeta)d\zeta = 1$, получим

$$\le \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|G(\alpha,\zeta)\Delta_h^k f(\theta-\zeta)\right|^q d\theta\right)^{\frac{1}{q}}d\zeta =$$

$$= \int_0^{2\pi}G(\alpha,\zeta)\left\|\Delta_h^k f(\theta-\zeta)\right\|_{L^q(0,2\pi)}d\zeta \le$$

$$\le \left\|\Delta_h^k f(\theta)\right\|_{L^q(0,2\pi)}.$$

Отсюда получаем, что $u(\alpha,\theta,f) \in H_q^r(0,2\pi)$ при любом $\alpha \in [0, R)$ и при любом $\alpha \in [0, R]$ выполняется неравенство

$$\|u(\alpha,\cdot;f)\|_{H_q^r(0,2\pi)} \le \|f\|_{H_q^r(0,2\pi)}.$$

Тогда

$$\|u-\varphi_N\|_{L^\nu(0,2\pi)} =$$

$$= \|u(\alpha,\theta,f) - \varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f),\alpha,\theta)\|_{L^\nu(0,2\pi)} =$$

Так как $u(\alpha,\theta,f) = \sum_{n=0}^{+\infty}q_n(\alpha,\theta;f)$ (см. [3, с. 305]), имеем

$$= \left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty}q_k(\alpha,\theta;f)\right\|_{L^\nu(0,2\pi)} \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{+\infty}\|q_k(\alpha,\theta;f)\|_{L^\nu(0,2\pi)}. \quad (7)$$

Применим к q_k неравенство разных метрик [3, с. 133]:

$$\|q_k(\alpha,\cdot;f)\|_{L^\nu(0,2\pi)} << 2^{k\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)}\|q_k(\alpha,\cdot;f)\|_{L^q(0,2\pi)}. \quad (8)$$

Средние Валле–Пуссена функции из класса $H_q^r(0,2\pi)$ удовлетворяют неравенству (см., напр., [3, с. 305])

$$\sup_{k=0,1,2,\dots}2^{kr}\|q_k(\alpha,\theta;f)\|_{L^q(0,2\pi)} <<$$

$$<< \|u(\alpha,\cdot;f)\|_{H_q^r(0,2\pi)} << \|f\|_{H_q^r(0,2\pi)} \le C(q,r).$$

Отсюда

$$\|q_k(\alpha,\cdot;f)\|_{L^q(0,2\pi)} \underset{q,r}{<<} 2^{-kr}. \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) продолжим оценку (7):

$$\|u-\varphi_N\|_{L^\nu(0,2\pi)} \underset{q,r,\nu}{<<} \sum_{k=n+1}^{\infty}2^{k\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)}\cdot 2^{-kr} \underset{r,q,\nu}{<<}$$

$$<< 2^{-(n+1)\left(r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)\right)} \underset{r,q,\nu}{<<} N^{-\left(r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)\right)}.$$

Оценка сверху получена.

Оценка снизу.

Пусть заданы целое положительное число N; $l_1,\dots,l_N$ – фиксированные линейные функционалы и функция $\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_N;\alpha,\theta)$ такая, что $\varphi_N(0,\dots,0;\alpha,\theta)=0$. Определим целое положительное число $n=n(N)$ из условий $|I_n|\ge 2N$ и $|I_n|\succ N$.

Пусть функция $\chi(x)$ определена, как в лемме В при $G=I_n$ и данных функционалах $l_1,\dots,l_N$. Оценим нормы $\|\chi\|_{W_q^r}$ и $\|\chi\|_{B_{q,1}^r}$ при $q\ge 2$. Для этого последовательно применим к $\chi(x)$ лемму А и неравенства разных метрик

$$\|\chi\|_{W_q^r} << n^r\|\chi\|_{L^q} << n^r n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} N^{\frac{1}{2}} << N^{r+1-\frac{1}{q}},$$

$$\|\chi\|_{B_{q,1}^r} << n^r\|\chi\|_{L^q} << n^r n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} N^{\frac{1}{2}} << N^{r+1-\frac{1}{q}}.$$

Поэтому найдется такое число $C(q,r)$, что функция

$$f(x)=f_{l_1,\dots,l_N}(x)=$$

$$=CN^{-r-1+\frac{1}{q}}\chi(x)\in W_q^r(0,2\pi)\cap B_{q,1}^r(0,2\pi).$$

Оценка снизу получится следующим образом:

$$\sup_{f\in B_{q,ж}^r(0,2\pi)}\sup_{0\le\alpha\le R}\|u(\alpha,\theta;f)-$$

$$-\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f),\alpha,\theta)\|_{L^\nu}\ge$$

$$\ge\sup_{f\in B_{q,1}^r(0,2\pi)}\sup_{0\le\alpha\le R}\|u(\alpha,\theta;f)-$$

$$-\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f),\alpha,\theta)\|_{L^\nu}\ge$$

$$\ge\sup_{0\le\alpha\le R}\|u(\alpha,\theta;f_{l_1,\dots,l_N}(\theta))-$$

$$-\varphi_N(l_1(f_{l_1,\dots,l_N}),\dots,l_N(f_{l_1,\dots,l_N}),\alpha,\theta)\|_{L^\nu}\ge$$

$$\ge\|u(R,\theta;f_{l_1,\dots,l_N}(\theta))\|_{L^\nu}=\|f_{l_1,\dots,l_N}(\theta)\|_{L^\nu}=$$

$$=CN^{-r-1+\frac{1}{q}}\|\chi(\theta)\|_{L^\nu}.$$

Далее, применяя неравенство Никольского для тригонометрических полиномов порядка N

$$\|T(x)\|_{p_2}\le N^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\|T(x)\|_{p_1}\ (1\le p_1<p_2\le+\infty,)$$

и учитывая (6), получаем оценку снизу

$$\delta_N(L_N,F)\ge$$

$$\ge CN^{-r-1+\frac{1}{q}}N^{-\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\infty}}\|\chi\|_{L^\infty}\ge CN^{-r+\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}}.$$

Тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темиргалиев Н.* Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестник Евразийского университета. 1997. № 3. С. 92-144.

2. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1953. 360 с.

3. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 455 с.

4. *Ажгалиев Ш., Темиргалиев Н.* Об информативной мощности линейных функционалов // Математические заметки. 2003. № 76. С. 806-812.

5. *Берикханова М.Е., Шерниязов К.Е.* Приближенное восстановление в смешанной норме решений уравнений Лапласа в круге // Вестник КазНУ. Сер. математика, механика, информатика. 2003. № 3(38).

Резюме

Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебінің шешімін жуықтау есебі дөңгелекте қарастырылған. Қателіктің дәл реті табылып, жуықтаудың сәйкес оңтайлы операторы құрылған.

Summary

The problem of approximate restoration of the Dirichlets problems solutions for the equation in a disk of all linear functionals is considered. The optimum order of restorations error is found and the corresponding optimum operator of restoration is constructed.

КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 14.04.06г.