УДК 532.685

С. К. ДЖАНАБЕКОВА, М. Р. КУЛИМАНОВА, Т. Ж. ЕСЕНБАЕВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Рассмотрена задача теории изотермической фильтрации жидкости в пористой среде, допускающее автомодельное решение в двумерном случае, и применен асимптотический метод относительно давления при наличии свободной границы между несмешивающимися жидкостями.

Работа посвящена дальнейшему исследованию задач изотермической фильтрации. Схема исследования состоит из вывода уравнений с помощью потенциала скорости, система уравнений составного типа приведена к более удобному виду относительно давления и насыщенности, относительно насыщенности показано применение автомодельных переменных и приведение к задаче типа Стефана, затем показано возможное применение асимптотического метода.

1. Вывод уравнений. Пусть ρ_α, μ_α и p_α – соответственно плотность, коэффициент жидкости и давление каждой из фаз: воды ($\rho_в, \mu_в, p_в$) и нефти ($\rho_н, \mu_н, p_н$). Как в [1], вводятся потенциалы Φ_α по формулам

$$\Phi_в = p_в + \rho_в \cdot g \cdot h,$$
$$\Phi_н = p_н + \rho_н \cdot g \cdot h, \qquad (1)$$

где h – высота точки над фиксированным уровнем, g – ускорение силы тяжести. Обобщенный закон Дарси для каждой из фаз при указанных предположениях принимает вид [1]

$$\vec{\vartheta} = -k_\alpha \cdot \nabla \Phi_\alpha, \quad (\alpha = в, н), \tag{2}$$

где $k = K(x, y, \Phi_\alpha) \cdot \tilde{k}(s)$ – коэффициент фильтрации. В случае учета капиллярных сил давления $p_н$ и $p_в$ связаны между собой соотношением Лапласа

$$p_н(x, y, t) - p_в(x, y, t) = p_k(s), \tag{3}$$

где $p_k(s)$ – капиллярное давление, причем для гидрофильного пласта $\frac{dp_k}{ds} < 0$. Относительно насыщенности каждой из фаз исходя из уравнения неразрывности имеем

$$\frac{\partial s_\alpha}{\partial t} = div(k_\alpha \cdot \nabla \Phi_\alpha), \ (\alpha = в, н) \tag{4}$$

и имеет место соотношение

$$s_в + s_н = 1. \tag{5}$$

Введением функции тока ψ, как в [1]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \vartheta_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\vartheta_2, \tag{6}$$

и дифференцированием (3) с учетом (4) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a \cdot \dfrac{\partial s}{\partial x} + c\left(f_1 + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right] + \\ + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[a \cdot \dfrac{\partial s}{\partial y} + c\left(f_2 - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right], \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \\ = \left[F_1\left(x, y, s, \psi_x, \psi_y\right) + F\left(x, y, z\right)\right] \cdot \left(k_в + k_н\right), \end{cases} \tag{7}$$

где

$$a = -c \cdot k_н \cdot \frac{dp_k}{ds} \geq 0,$$

$$c = \frac{k_в}{k_н + k_в} \equiv c(s) \geq 0,$$

$$f_1 = g \cdot k_н \cdot (\rho_в - \rho_н) \cdot \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$f_2 = g \cdot k_н \cdot (\rho_в - \rho_н) \cdot \frac{\partial h}{\partial y},$$

$$F_1 \equiv \left\{\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{k_н + k_в}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{k_н + k_в}\right)\right\}, \tag{8}$$

$$F_2 \equiv g \cdot \left\{\frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial s}{\partial y}\right\} \cdot \left(c_н \cdot \rho_н + c_в \cdot \rho_в\right)'_s,$$

$$c_\alpha = \frac{k_\alpha}{k_в + k_н}, \quad (\alpha = в, н).$$

Для определения функций $s(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t)$ на границе Г считаются выполненными следующие условия:

$$s|_Г = \tilde{g}(t, \sigma) \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|_Г = k_н \cdot \frac{\partial p_н}{\partial \sigma} + k_в \cdot \frac{\partial p_в}{\partial \sigma} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial \sigma} \times$$

$$\times (k_н \cdot \rho_н + k_в \cdot \rho_в) \equiv \theta(t, \sigma),$$

где σ – дуговая абсцисса Г.

Помимо краевых условий (9) предполагается также известным начальное распределение водонасыщенности $s(x,y,t)$ в пласте:

$$s(x, y, 0) = \tilde{g}_0(x, y). \tag{10}$$

Теорема. При известных значениях давления и $\lim\limits_{t \to \infty} \tilde{g}(t, \sigma) = \beta > 0$ справедливы следующие соотношения:

$R(t) = D_*(a, b, \beta) \cdot t^{1/2}$ и $s(x, y, t) = \upsilon[\xi, \beta]$,

где a, b – положительные постоянные.

Доказательство. Как легко подсчитать, функция $\upsilon[\xi, \beta]$, $\xi = \dfrac{ax + by}{\sqrt{t+1}}$ и параметр $D_*(a, b, \beta)$ подлежат определению из условий

$$\frac{d^2 \upsilon}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} a(\upsilon) \frac{d\upsilon}{d\xi} = 0, \ a = \Phi'(\upsilon), \ \xi \in (0, D_*), \tag{11}$$

$$\upsilon(0, \beta) = \beta, \ \upsilon(D_*, \beta) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{d\upsilon}{d\xi}(D_*, \beta) = -\frac{1}{2} D_*. \tag{13}$$

Покажем, что для каждого $D>0$ найдется хотя бы одна функция $V(\xi)$, удовлетворяющая уравнению (11) и краевым условиям (12). Далее, вычисляя производную $dV/d\xi$ в точке $\xi = D$ и подставляя ее в левую часть (13), получаем уравнение, решение которого D_* определяет решение задачи (12)–(13). Для определения функции $V(\xi)$ рассмотрим линейную краевую задачу:

$$\frac{d^2\tilde{V}}{d\xi^2}+\frac{\xi}{2}a[g(\xi)]\frac{d\tilde{V}}{d\xi}=0,\ \tilde{V}(0)=\beta,\ \tilde{V}(D)=0,$$

где аргументом в коэффициенте является произвольная неотрицательная функция $g(\xi)$, непрерывная на интервале $(0,D)$ и ограниченная там постоянной β. Решение последней дается формулой

$$\tilde{V}(\xi)=-\beta\cdot\frac{\int\limits_{\xi}^{D}\mathbf{exp}\left(-\int\limits_0^{\tau}\frac{s}{2}a[g(s)]ds\right)d\tau}{\int\limits_{0}^{D}\mathbf{exp}\left(-\int\limits_0^{\tau}\frac{s}{2}a[g(s)]ds\right)d\tau}. \quad (14)$$

Правая часть выписанного выражения есть непрерывный оператор $\Psi(g)$, определенный на множестве $\mathfrak{R}$ функций g с описанными ранее свойствами и отображающий это множество в себя. Более того, так как производные функции $\tilde{V}(\xi)$ равномерно ограничены:

$$\left|\frac{d\tilde{V}}{d\xi}(\xi)\right|\le\beta\left(\int\limits_0^D\mathbf{exp}\left(-\frac{a_0}{4}s^2\right)ds\right)^{-1},$$

$$a_0=\min_{s\in(0,\beta)}\{a(s),a^{-1}(s)\},$$

то оператор $\Psi(g)$ вполне непрерывный на множестве $\mathfrak{R}$. По теореме Шаудера найдется хотя бы одна неподвижная точка V оператора $\Psi: V=\Psi(V)$. Функция $V(\xi)$ удовлетворяет уравнению (11) и условиям (12). Уравнение $\frac{d\upsilon}{d\xi}(D)=-\frac{1}{2}D$ имеет хотя бы одно решение $D_*>0$, поскольку для $V(\xi)$ справедливо представление, аналогичное (14), из которого легко выводятся неравенства

$$-\beta e^{-\frac{a_0}{4}D^2}\left(\int\limits_0^D e^{-\frac{\tau^2}{4a_0}}d\tau\right)^{-1}\le\frac{dV}{d\xi}(D)\le$$

$$\le-\beta e^{-\frac{D^2}{4a_0}}\left(\int\limits_0^D e^{-\frac{a_0\tau^2}{4}}d\tau\right)^{-1}.$$

Единственность найденного автомодельного решения следует из того, что функция $U_*(x,t)$, равная $\Phi[\theta_*(x,t)]$ при $0<x<R_*(t)$ и минус единице при $x>R_*(t)$, является единственным ограниченным обобщенным решением задачи Стефана с указанными в теореме 3 данными.

Непрерывность $D_*(\beta)$ от параметра β следует из теоремы о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметра. Доказательство последнего утверждения теоремы вытекает из равенства

$$\frac{1}{2}D_*^2(\beta)+\int\limits_0^{D_*(\beta)}\xi\Phi[\upsilon(\xi,\beta)]d\xi=\beta, \quad (15)$$

которое получается после умножения уравнения (11) на ξ и интегрирования по ξ в пределах от 0 до D_* с использованием условий (12) и (13).

Заметим, что задачу относительно давления можно переформулировать следующим образом. Пусть до начального момента $t'=0$ жидкость покоится. При $t'=0$ начинает действовать механизм образования волн, который движется в положительном направлении оси Ох с постоянной скоростью V' и осциллирует с заданной частотой. Переходя в систему координат, движущуюся вместе с источником возмущений (эта система совпадает с выбранной выше системой Оху), получим задачу о волнах на потоке.

Потенциал скоростей Φ_j для j-го слоя будем искать в виде

$$\Phi_j(x,y,z,t,\varepsilon)=$$

$$=-x+\varphi_j(x,y,z,t,\varepsilon)+\varepsilon(x,y,z,t), \quad (16)$$

где x_j – заданные потенциалы возмущений (возможно, различные для каждого слоя), параметр ε характеризует мощность источника. Для функций φ_j имеем следующую начально-краевую задачу:

$$\Delta\varphi_1 = 0\ \left(\eta(x,z,t,\varepsilon) < y < H_1\right), \qquad (17)$$

$$\Delta\varphi_2 = 0\ \left(-H_2 < y < \eta(x,z,t,\varepsilon)\right), \qquad (18)$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2)_y = \eta(\varphi - \varphi_2)_x - \varepsilon(\chi_1 - \chi_2)_y + $$
$$+ \varepsilon\eta_x(\chi_1 - \chi_2)_x\,, \qquad (19)$$

$$\varphi_{1t} - \varphi_{1x} + \eta - \lambda[\varphi_{2t} - \varphi_{1t} + \eta] = 0{,}5\lambda\left|\nabla(\varphi_2 + \varepsilon\chi_2)\right|^2 -$$
$$- 0{,}5\lambda\left|\nabla(\varphi_1 + \varepsilon\chi_1)\right|^2 + \varepsilon\lambda(\chi_{2t} - \chi_{2x}) - \varepsilon(\chi_{1t} - \chi_{1x}),$$
$$(20)$$

$$\eta_t - \eta_x - \varphi_{2y} = \varepsilon\chi_{2y} - \eta_x(\varphi_2 + \varepsilon\chi_2)_x$$
$$\left(y = \eta(x,z,t,\varepsilon)\right), \qquad (21)$$

$$\varphi_{1y} = -\varepsilon\chi_{1y}\ (y = H_1), \qquad (22)$$

$$\varphi_{2y} = -\varepsilon\chi_{2y}\ (y = -H_2), \qquad (23)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \eta = 0\ (t \le 0), \qquad (24)$$

$$|\eta| < \infty,\ \left|\nabla\varphi_j\right| < \infty\ (t > 0). \qquad (25)$$

Здесь (17), (18) – уравнения движения в соответствующих областях, (19), (20) – условия непрерывности на поверхности раздела $y = \eta(x,z,t,\varepsilon)$ нормальной составляющей вектора скорости и давления соответственно, (21) – кинематическое условие, (22), (23) – условия непротекания на крышке и дне, (24) – начальные условия, условие (25) означает, что нас будут интересовать только такие классы течений, поле скоростей которых описывается ограниченными всюду в области, занятой жидкостью, функциями.

Если внутренние волны вызваны осциллирующим давлением εp (случай 20а), то в равенствах (16)–(25) следует положить $\chi_j \equiv 0$ (j=1,2), а условие (20) заменить следующим:

$$\varphi_{1t} - \varphi_{1x} + \eta - \lambda(\varphi_{2t} - \varphi_{2x} + \eta) +$$
$$+ 0{,}5\left(\left|\nabla\varphi_1\right|^2 - \lambda\left|\nabla\varphi_2\right|^2\right) = \varepsilon p(x,z,t). \quad (20')$$

В случае осциллирующей деформации дна (деформация крышки рассматривается аналогично) полагаем $\chi_j \equiv 0$, а условие (22) заменяем на

$$\varphi_{2y} = \varepsilon\left(f_t + \varphi_{2x} f_x\right)\left(y = -H_2 + \varepsilon f(x,z,t)\right).$$
$$(22')$$

2. Асимптотическое решение. Функцию $\varphi_j(x,y,z,t,\varepsilon)$, $\eta(x,z,t,\varepsilon)$ будем искать при $\varepsilon << 1$ в виде

$$\varphi_j = \varepsilon\varphi_j^{(0)} + \varepsilon^2\varphi_j^{(1)} + \mathrm{K}\ \ (j{=}1,2),$$
$$\eta = \varepsilon\eta^{(0)} + \varepsilon^2\eta^{(1)} + \mathrm{K} \qquad (26)$$

Подставляя разложения (26) в равенства (17)–(25) и удерживая старшие члены при $\varepsilon \to 0$, получаем, что главный член асимптотики решения при $\varepsilon \to 0$ описывается линейной краевой задачей, которая получается после отбрасывания в (17)–(25) нелинейных членов.

Задачи для последующих приближений могут быть построены с помощью метода Стокса. В этом методе на k-м шаге ищутся функции $\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{|k|}$, гармонические в полосах $0 < y < H_1$ и $-H_2 < y < 0$ соответственно, в условиях (19)–(21) каждый член разлагается в ряд Тейлора в окрестности невозмущенного положения поверхности раздела слоев (y = 0), например

$$\varphi_{1y}\left(x,\eta(x,z,t,\varepsilon),z,t,\varepsilon\right) = \varphi_{1y}(x,z,t,\varepsilon) +$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\Big|_{y=0} \cdot \eta(x,z,t,\varepsilon) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial y^3}\Big|_{y=0} \times$$
$$\times\ \eta^2(x,z,t,\varepsilon) + \mathrm{K}\,,$$

а затем в эти ряды подставляются разложения (26). При этом на каждом шаге получаем линейную неоднородную начально-краевую задачу в фиксированной области. Выпишем общий вид этих задач:

$$\Delta\varphi_1 = 0\ \left(\eta(x,z,t,\varepsilon) < y < H_1\right), \qquad (27)$$

$$\Delta\varphi_1 = 0\ \left(\eta(x,z,t,\varepsilon) < y < H_1\right), \qquad (28)$$

$$(u_1 - u_2)_y = f_1(x,t)\ \ (y = 0), \qquad (29)$$

$$u_{1t} - u_{1x} + h - \lambda(u_{2t} - u_{2x} + h) = f_2(x,t)$$
$$(y = 0), \qquad (30)$$

$$h_t - h_x - u_{2y} = f_3(x,t)\ \ (y = 0), \qquad (31)$$

$$u_{1y} = f_4(x,t)\ \ (y = H_1),$$

$$u_{2y} = f_5(x,t)\ \ (y = -H_2),$$

$$u_1 = u_2 = h = 0\ \ (t < 0),$$

$$|h| < \infty,\ \left|\nabla u_j\right| < \infty\ \ (t > 0).$$

Здесь $u_j = \varphi_j^{(n)}$, $h = \eta^{(n)}$, j = 1,2, n = 0,1,… .

Функции $f_k(x,t)$ для n-го шага определяются через предыдущие приближения $\varphi_j^{(0)}, \varphi_j^{(1)}, \ldots, \varphi_j^{(n-1)}$ в соответствии с процедурой Стокса. После определения давления решается задача относительно насыщенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джанабекова С.К., Кулиманова М.Р.* О свойствах решения одной задачи противоточной капиллярной пропитки // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. наук. 2005. №1. С. 22-26.

2. *Ентов В.М., Зазовский А.Ф.* Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Недра, 1989. 232 с.

3. *Мейрманов А.М.* Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 237 с.

4. *Антонцев С.Н., Монахов В.Н.* О некоторых задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды. 1969. Вып. 2. С. 156-167.

Резюме

Жұмыс екі өлшемді құбыр аймағындағы сұйықтар қозғалысының математикалық моделін зерттеуге арналған. Математикалық модель біртұтас орта механикасының заңдарына сүйеніп құрастырылған. Қысым бойынша шешімнің асимптотикалық жағдайы зерттелген. Алынған нәтижелер тиімді есептеу алгоритмдерін құруға мүмкіндік жасайды.

Summary

The work is devoted to defining ranges of distribution of a chisel solution in a chink to a zone of a layer with the help of mathematical model. The mathematical model is made on the basis of the laws of preservation of weight. To the decision of a problem concerning pressure it is applied limiting a method. The received results can be applied at drawing up of effective computing algorithms.

Актауский государственный университет им. Ш. Есенова, г. Актау

Поступила 01.04.06г.