УДК 517.938

И. Р. КАПШАЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА

Построено асимптотическое разложение решений задач Коши для сингулярно возмущенного интегродифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Доказывается теорема существования и единственности указанного разложения. Устанавливаются равномерные по малому параметру оценки остаточного члена асимптотического разложения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейное сингулярно возмущенное интегродифференциальное уравнение в частных производных вида

$$L_\varepsilon \equiv \varepsilon H^2[y] + A(t,x)H[y] + B(t,x)y = \qquad (1)$$

$$= F(t,x) + \int_0^1 [K_1(t,s,x)H[y] + K_0(t,s,x)y]ds,$$

удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$y(0,x,\varepsilon) = \pi_0(x), \quad y_t'(0,x,\varepsilon) = \pi_1(x). \quad (2)$$

Здесь $e > 0$ – малый параметр, $(t,x) \in G$ – независимые переменные, $y = y(t,x,e)$ – искомая функция, $A(t,x)$, $B(t,x)$, $F(t,x)$, $K_i(t,s,x)$ и $\pi_i(x)$ $(i=0,1)$ – функции, заданные в $G = \{(t,x) : 0 \le t \le 1, \lambda_1(t) \le x \le \lambda_2(t)\}$, а операторы:

$$H[y] = < e(t,x) \cdot grady >, \quad H^2[y] = H[H[y]],$$

где знаком $< \cdot >$ обозначено скалярное произведение векторов $e(t,x) = (1, Q(t,x))$ и $grady = = (\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x})$, а функция $Q(t,x)$ также задана в G.

Предположим, что:

I. Функции $A(t,x)$, $B(t,x)$, $F(t,x)$, $K_i(t,s,x)$ и $\pi_i(x)$ – достаточно гладкие по совокупности аргументов $(t,x) \in G$, $(i = 0,1)$.

II. Функции $A(t,x)$, $Q(t,x)$ и $\pi_s(x)$ удовлетворяют условиям:

$$A(t,x) \ge \gamma > 0, \quad Q(t,x) \ge \sigma > 0, \quad (t,x) \in G,$$

где g, $s > 0$ – некоторые вещественные числа.

III. Функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ являются решениями уравнения характеристики $\frac{d\lambda}{dt} = Q(t,\lambda)$, соответствующего (1), и удовлетворяют начальным условиям $\lambda_1(0) = 0$, $\lambda_2(0) = 1$.

IV. Число 1 не является собственным числом ядра:

$$K(t,s,x) = \frac{1}{A(s,x)}\left(K_1(t,s,x) + \int_s^1 [K_0(t,\tau,x) - \right.$$

$$\left. - K_1(t,\tau,x) \cdot \frac{B(\tau,x)}{A(\tau,x)}] \cdot e^{-\int_x^\tau \frac{B(\xi,x)}{A(\xi,x)} d\xi} d\tau \right). \qquad (3)$$

Наряду с уравнением рассмотрим также невозмущенное уравнение

$$A(t,x)H[y_0] + B(t,x)y_0 = F(t,x) +$$

$$+ \int_0^1 [K_1(t,s,x)H[y_0] + K_0(t,s,x)y_0]ds, \qquad (4)$$

полученное из (1) при $e = 0$ и удовлетворяющее начальному условию

$$y_0(t,x) = \pi_0(x). \qquad (5)$$

Цель работы: 1) построить равномерное по малому параметру асимптотическое разложение решений задач Коши (1), (2); 2) установить оценки для остаточного члена асимптотического разложения; 3) доказать, что построенное асимптотическое разложение существует и единственно. Заметим, что для интегродифференциальных уравнений в частных производных типа Вольтерра эти вопросы изучены в [2]. Отметим также, что для обыкновенных интегродифференциальных уравнений аналогичные задачи исследованы в [1].

2. Построение асимптотики. Решение задачи (1), (2) ищем в виде

$$y(t,x,\varepsilon) = y_\varepsilon(t,x) + \varepsilon \cdot W_\varepsilon(\tau,x), \quad \tau = t/\varepsilon. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (1), будем иметь

$$L_\varepsilon y_\varepsilon + \widetilde{H}^2[W_\varepsilon] + A(\varepsilon\tau,x)\widetilde{H}[W_\varepsilon] + \varepsilon B(\varepsilon\tau,x)W_\varepsilon = \int_0^1 \big(K_1(t,s,x)H[y_\varepsilon(s,x)] + K_0(t,s,x)y_\varepsilon(s,x)\big)ds +$$
$$+\varepsilon\cdot\int_0^\infty \big(K_1(t,\varepsilon\cdot l,x)\widetilde{H}[W_\varepsilon(l,x)] + K_0(t,l,x)W_\varepsilon(l,x)\big)dl + F(t,x),$$

где $\widetilde{H}[W_\varepsilon] = \dot{W}_\varepsilon + \varepsilon\cdot Q(t,x)\cdot\dfrac{\partial \dot{W}_\varepsilon}{\partial x}$.

Выписывая теперь отдельно уравнение с коэффициентами, зависящими от t, и отдельно уравнение с коэффициентами, зависящими от t, получаем для $y_\varepsilon(t,x)$ и $W_\varepsilon(\tau,x)$ следующие уравнения:

$$L_\varepsilon y_\varepsilon(t,x) = \int_0^1 \big(K_1(t,s,x)H[y_\varepsilon(s,x)] + K_0(t,s,x)y_\varepsilon(s,x)\big)ds +$$
$$+\varepsilon\cdot\int_0^\infty \big(K_1(t,\varepsilon\cdot l,x)\widetilde{H}[W_\varepsilon(l,x)] + K_0(t,l,x)W_\varepsilon(l,x)\big)dl + F(t,x), \quad (7)$$

$$M_\varepsilon W_\varepsilon(\tau,x) = \ddot{W}_\varepsilon(\tau,x) + A(0,x)\dot{W}_\varepsilon(\tau,x) = -G(\tau,x,\varepsilon), \quad (8)$$

где

$$G(\tau,x,\varepsilon) = \varepsilon\cdot\left(B(\varepsilon\tau,x)W_\varepsilon + \big(Q(\varepsilon\tau,x) + \dot{Q}(\varepsilon\tau,x)\big)\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x} + 2Q(\varepsilon\tau,x)\frac{\partial \dot{W}_\varepsilon}{\partial x}\right) +$$
$$+\varepsilon^2\cdot\left(Q(\varepsilon\tau,x)\frac{\partial Q(\varepsilon\tau,x)}{\partial x}\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x} + Q^2(\varepsilon\tau,x)\frac{\partial^2 W_\varepsilon}{\partial x^2}\right).$$

Решение уравнения (7) будем искать в виде ряда

$$y_\varepsilon(t,x) = y_0(t,x) + \varepsilon\cdot y_1(t,x) + \ldots, \quad (9)$$

а решение уравнения (8) – в виде

$$W_\varepsilon(\tau,x) = W_0(\tau,x) + \varepsilon\cdot W_1(\tau,x) + \ldots \quad (10)$$

Подставляя формально ряды (9), (10) соответственно в уравнения (7), (8) и сумму (6), с учетом (9), (10), в начальные условия (2), а затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях e, получаем последовательность задач для коэффициентов разложений (9), (10).

Для $y_k(t,x)$ имеем

$$L_0 y_k(t,x) = \int_0^1 \big(K_1(t,s,x)H[y_k(s,x)] + K_0(t,s,x)y_k(s,x)\big)ds + F_k(t,x), \quad (11)$$
$$y_0(0,x) = \pi_0(x),$$
$$y_k(0,x) = \frac{\int_0^\infty \Phi_{k-1}(\tau,x)d\tau - \dfrac{\partial y_{k-1}(0,x)}{\partial t}}{A(0,x)},$$

а для $W_k(\tau,x)$ –

$$\ddot{W}_k(\tau,x) + A(0,x)\cdot\dot{W}_k(\tau,x) = \Phi_k(\tau,x), \quad (12)$$
$$W_0(0,x) = -y_1(0,x),\ \dot{W}_0(0,x) = \pi_1(x) - \frac{\partial y_0(0,x)}{\partial t},$$
$$W_k(0,x) = -y_{k+1}(0,x),\ \dot{W}_k(0,x) = -\frac{\partial y_k(0,x)}{\partial t},$$

где функции $F_k(t,x)$ и $\Phi_k(\tau,x)$ выражаются формулами:

$$F_0(t,x) = F(t,x),\ F_k(t,x) = -H^2[y_{k-1}(t,x)] + \int_0^\infty \big(K_1(t,\varepsilon l,x)H[W_{k-1}(l,x)] + K_0(t,\varepsilon l,x)W_{k-1}(l,x)\big)dl,$$
$$\Phi_0(\tau,x) = 0,$$
$$\Phi_k(\tau,x) = -\sum_{i=1}^{k}\frac{\tau^i}{i!}\frac{\partial^{(i)}A(0,x)}{\partial\tau^i}\cdot W_{k-i} - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{\tau^i}{i!}\cdot\left(\frac{\partial^{(i)}B(0,x)}{\partial\tau^i}W_{k-i} + \frac{\partial^{(i)}}{\partial\tau^i}\left(Q(0,x) + \frac{\partial Q(0,x)}{\partial\tau}\right)\frac{\partial W_{k-i}}{\partial x} + 2\frac{\partial^{(i)}Q(0,x)}{\partial\tau^i}\cdot\frac{\partial \dot{W}_{k-i}}{\partial x}\right) -$$
$$-\sum_{i=0}^{k-2}\frac{\tau^i}{i!}\left(\frac{\partial^{(i)}}{\partial\tau^i}\left(Q(0,x)\cdot\frac{\partial Q(0,x)}{\partial x}\right)\frac{\partial W_{k-i}}{\partial x} + \frac{\partial^{(i)}Q^2(0,x)}{\partial\tau^i}\cdot\frac{\partial^2 W_{k-i}}{\partial x^2}\right).$$

Если выполнены условия I–IV, то, рассуждая так же, как и в [2], можно доказать, что решения задач (11), (12) при $0 \le t \le 1$, $\tau \ge 0$ существуют, единственны и для них справедливы следующие оценки:

$$\left|\dot{y}_k(t,x)\right| \le K\,,\ \left|\frac{\partial y_k(t,x)}{\partial t}\right| \le K\,,\ 0 \le t \le 1, \quad (13)$$

$$\left|W_k(\tau,x)\right| \le K \cdot e^{-\gamma\tau}\,,\ \left|\dot{W}_k(\tau,x)\right| \le K \cdot e^{-\gamma\tau}\,.$$

Из рядов (9), (10) с учетом (6) образуем функцию

$$\overline{y}_n(t,x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \cdot y_k(t,x) +$$

$$+\varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \cdot W_k(\tau,x), \qquad (14)$$

где коэффициенты $y_k(t,x)$ и $W_k(\tau,x)$ определяются из (11) и (12) соответственно.

Нетрудно доказать, что функция (14) является приближенным решением задачи (1), (2) с точностью порядка $O(\varepsilon^{n+1})$, т.е.

$$L_\varepsilon \overline{y}_n = \int_0^1 \big(K_1(t,s,x) H\left[\overline{y}_n(s,x,\varepsilon)\right] +$$

$$+ K_0(t,s,x)\overline{y}_n(s,x,\varepsilon)\big)ds +$$

$$+ F(t,x) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

$$\overline{y}_n(0,x,\varepsilon) = \pi_0(x)\,,\ \frac{\partial \overline{y}_n 0,x,\varepsilon)}{\partial t} = \pi_1(x)\,. \quad (15)$$

Положим

$$y(t,x,\varepsilon) = \overline{y}_n(t,x,\varepsilon) + R_n(t,x,\varepsilon)\,, \qquad (16)$$

где $y(t,x,\varepsilon)$ – точное решение задачи (1), (2), $\overline{y}_n(t,x,\varepsilon)$ – ее приближенное решение и $R_n(t,x,\varepsilon)$ – остаточный член.

Подставляя (15) в (1) и учитывая (14), получаем

$$L_\varepsilon R_n = \int_0^1 \big(K_1(t,s,x) H\left[R_n(s,x,\varepsilon)\right] +$$

$$+ K_0(t,s,x) R_n(s,x,\varepsilon)\big)ds + f(t,x,\varepsilon),$$

$$R_n(0,x,\varepsilon) = 0\,,\ \frac{\partial R_n(0,x,\varepsilon)}{\partial t} = 0\,, \qquad (17)$$

где

$$f(t,x,\varepsilon) \equiv F(t,x) + \int_0^1 \big(K_1(t,s,x) H\left[\overline{y}_n(s,x,\varepsilon)\right] +$$

$$+ K_0(t,s,x)\overline{y}_n(s,x,\varepsilon)\big)ds -$$

$$- L_\varepsilon \overline{y}_n = O(\varepsilon^{n+1})\,,\ 0 \le t \le 1\,. \qquad (18)$$

Используя те же рассуждения, что и в [2], решение $R_n(t,x,\varepsilon)$ запишем в виде

$$R_n(t,x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Phi_\varepsilon(t,s,x) \cdot Z(s,x,\varepsilon) ds\,, \quad (19)$$

где $Z(t,x,\varepsilon)$ – решение интегрального уравнения Фредгольма

$$Z(t,x,\varepsilon) = \int_0^1 K_\varepsilon(t,s,x) \cdot Z(s,x,\varepsilon) ds + f(t,x,\varepsilon), \qquad (20)$$

а ядро $K_\varepsilon(t,s,x)$ выражается формулой

$$K_\varepsilon(t,s,x) = K(t,s) -$$

$$- K(t,1) \cdot e^{\int_s^1 \frac{B(\xi,x)}{A(\xi,x)} d\xi} \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^1 A(\xi) d\xi} + O(\varepsilon)\,, \quad (21)$$

причем $K(t,s)$ имеет представление (5).

Предположим, что выполнено следующее условие.

V. При достаточно малых *e* число 1 не является собственным значением ядра (21).

Теорема. Пусть выполнены условия I–V. Тогда решение $y(t,x,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (2) существует, единственно и представимо в виде разложения

$$y(t,x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \cdot y_k(t,x) +$$

$$+ \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \cdot W_k(\tau,x) + R_n(t,x,\varepsilon)\,,\ \tau = \frac{t}{\varepsilon}\,, \quad (22)$$

остаточный член $R_n(t,x,\varepsilon)$ удовлетворяет оценкам

$$\left|R_n(t,x,\varepsilon)\right| \le K \cdot e^{n+1},\ \left|R'_{nt}(t,x,\varepsilon)\right| \le K \cdot \varepsilon^{n+1}\,,$$

$$0 \le t \le 1\,, \qquad (23)$$

а коэффициенты $y_k(t,x)$ и $W_k(\tau,x)$ однозначно определяются из задач (10), (11) и для них справедливы оценки (12), а коэффициенты $W_n(\tau,x)$ ограничены при $\tau \ge 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Касымов К.А.* Линейные сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения второго порядка. Алма-Ата: Наука, 1981. 123 с.
2. *Тажимуратов И.Т., Капшаев И.Р.* Оценки решений линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Воль-терра // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. 2000. № 2(21). С. 100-106.

Резюме

Дербес туындылы екінші ретті сингулярлы ауытқыған Фредгольм типтес интегралды дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебіне бағалаулар алынған.

Кіші параметр нольге ұмтылған жағдайда ауытқыған есептің шешімі ауытқымаған есептің шешіміне ұмтылатыны дәлелденген.

Summary

The estimations for the solutions of the Cauchy problems for the singular perturbed partial second order integral differential equations have suggesting.

Have proving that the solution of the perturbed problem going to the solution of the nonpertubed problem when small parameter going to zero.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 27.02.06 г.