УДК 517.958

Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОКЕАНА

В работе изучается сходимость разностных схем линейной модели океана. Исследуется сходимость итерационного метода по физическим факторам для линейных сеточных уравнений модели океана.

Рассмотрим краевые задачи модели океана в области Ω :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + \mu \Delta v - \hat{\nabla} P = f, \qquad (1)$$

$$\partial iv\, v = \partial \hat{i}v\, v + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_3} = \rho g,\ \partial \hat{i}v\, v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2},\ v = (v_1, v_2), \qquad (3)$$

$$v\Big|_{x_3=0} = v\Big|_{x_3=H} = 0,\ v_3\Big|_{x_3=H} = v_3\Big|_{x_3=0} = 0,\ v\Big|_{\gamma} = 0. \qquad (4)$$

Для построения разностных схем для задачи (1)–(4) строим сначала сетки. Предположим, что область Ω – прямоугольный параллелепипед. Для простоты будем предполагать Ω – куб, $h = 1/N$. Введем множество

$$\bar{\Omega}_1 = \left\{ \begin{array}{l} x = (x_1, x_2, x_3),\ x_1 = (i-1/2)h, \\ x_2 = jh,\ x_3 = kh, \\ 0 \le i \le N+1,\ 0 \le j \le N,\ 0 \le k \le N \end{array} \right\},$$

$$\bar{\Omega}_2 = \left\{ \begin{array}{l} x = (x_1, x_2, x_3),\ x_1 = ih, \\ x_2 = (j-1/2)h,\ x_3 = kh \\ 0 \le i \le N,\ 0 \le j \le N+1,\ 0 \le k \le N \end{array} \right\},$$

$$\bar{\Omega}_3 = \left\{ \begin{array}{l} x = (x_1, x_2, x_3),\ x_1 = ih, \\ x_2 = jh,\ x_3 = (k-1/2)h, \\ 0 \le i \le N,\ 0 \le j \le N,\ 0 \le k \le N+1 \end{array} \right\},$$

$$\bar{\Omega}_h = \left\{ \begin{array}{l} x = (x_1, x_2, x_3),\ x_1 = ih, \\ x_2 = jh,\ x_3 = kh, \\ 0 \le i, j, k \le N \end{array} \right\}.$$

Обозначим через S_1, S_2, S_3, S_h – границы области $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_h$ соответственно. Пусть H – множество векторов функции, определенных на $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$, а P – пространство функции, определенных на Ω_h и ортогональные единице. Сначала рассмотрим разностную схему первого порядка, аппроксимирующую уравнения (1)–(3).

$$\mu_0 u_{x_3\bar{x}_3} + \mu \Delta_h u - \hat{\nabla}_h Q = f_h, \tag{5}$$

$$div_h \overset{\rho}{u} = di\hat{v}_h u + u_{\bar{x}_3} = 0, \tag{6}$$

$$-Q_{x_3} = \rho g, \tag{7}$$

$$u = (u_1, u_2)\big|_{S_h=0} = 0,\ S_h \text{ – в границе } \Omega_h, \tag{8}$$

$$u_3\big|_{x_3=0} = u_3\big|_{x_3=1} = 0. \tag{9}$$

Здесь использовались обозначения

$$u_{x_1} = \frac{u_{i+1,jk} - u_{ijk}}{h},\ u_{\bar{x}_1} = \frac{u_{ijk} - u_{i-1jk}}{h},$$

$$u_{x_1\bar{x}_1} = \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{h},\ \Delta_h u = u_{x_1\bar{x}_1} + u_{x_2\bar{x}_2},$$

$$di\hat{v}_h u = \frac{u_{1i,j,k} - u_{i-1,j,k}}{h} + \frac{u_{2i,j,k} - u_{2i,j-1,k}}{h},$$

$$\|u\|^2 = \sum_{\Omega_h} (u_{ijk})^2 h^3,$$

$$\hat{\nabla}_h Q = (Q_{x_1}, Q_{x_2}),\ div_h \overset{r}{u} = di\hat{v}_h u + u_{3\bar{x}_3},$$

$$\nabla Q = (Q_{x_1}, Q_{x_2}, Q_{x_3}). \tag{10}$$

К остальным аргументам обозначения вводятся аналогично. Уравнение (6) аппроксимируется в области Ω_h. Уравнение (4) выполняется в точках $\overline{\Omega}_h$, где определен $div\overset{\rho}{u}$. Уравнение (8) справедливо в точках Ω_h и $x_3 = 0$. Для произвольных сеточных функций v и u, заданные на сетке, справедливы легко проверяемые соотношения:

$$(v,u)_{x_1} = u_{x_1} v + \overset{+1}{u} v_{x_1} = u_{x_1} \overset{+1}{v} + u v_{x_1},$$

$$(v,u)_{\bar{x}_1} = u_{\bar{x}_1} v + \overset{-1}{u} v_{\bar{x}_1} = u_{\bar{x}_1} \overset{-1}{v} + u v_{x_1},$$

$$2\Delta t u^k \frac{u^k - u^{k-1}}{\Delta t} = (u^{k-1})^2 + (u^k - u^{k-1})^2,$$

$$h\sum_{l=0}^{m-1} u_x(l) v(l) = -h\sum_{l=1}^{m} u(l) v_{\bar{x}}(l) +$$
$$+ u(m)v(m) - u(0)v(0).$$

Обозначим через Ω_h^1, Ω_h^0 – множество тех точек $\overline{\Omega}_h$, где определены операторы ∇_h, div_h соответственно. Вычислим

$$\sum_{i=0,j,k=1}^{N-1} (Q_{x_1}, u_1) h^3 = \sum_{j,k=1}^{N-1} h^2 \sum_{i=0}^{N-1} Q_{x_1} u h =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{N-1} h^2 \sum_{i=0}^{N} Q u_{\bar{x}_1} h = \sum_{i,j,k=1}^{N} Q u_{\bar{x}_1} h^3,$$

$$\sum_{j=0,i,k=1}^{N} (Q_{x_2}, u_2) h^3 = -\sum_{i,j,k=1}^{3} Q u_{2\bar{x}_2} h^3,$$

$$\sum_{k=0,i,j=1}^{N} (Q_{x_3}, u_3) h^3 = -\sum_{i,j,k=1}^{N} Q u_{3\bar{x}_3} h^3.$$

Умножим (5), (6) (7) на u_1, u_2, u_3 и суммируем по Ω_h, в результате получим

$$\|u\|_1^2 = (f_h, u) + (\rho g, u_3),$$

где

$$\|u\|_1 = (\mu_0 \|u_{x_3}\|_{\Omega_4^1}^2 + \mu(\|u_{x_1}\|_{\Omega_4^1}^2 + \|u_{x_2}\|_{\Omega_4^1}^2))^{1/2}.$$

Используя неравенство Гельдера, имеем

$$\|u\|_1^2 \le \|f_h\|\|u\| + \|\rho g\|\|u_3\| \le (\|f_h\| + \|\rho g\|)\|u\|_1.$$

Здесь использованы $\|u_3\| \le C\|u_{3x_3}\| \le$ $\le C\|di\hat{v}u\| \le C\|u\|_1$. Далее легко выводится

$$\|u\|_1^2 \le C(\|f_h\|^2 + \|\rho g\|^2).$$

Теорема 1. *Пусть решение задачи (1)–(4) достаточно гладкое. Тогда имеет место оценка* $\|u - v\|_1^2 \le Ch^2$.

В силу (1)–(4) и (5)–(9) для $\omega = v - u$, $\pi = P - Q$ получим уравнение

$$\mu_0 \omega_{x_3\bar{x}_3} + \mu\Delta\omega - \hat{\nabla}_h \pi = r_h, \tag{11}$$

$$div_h \overset{\rho}{\omega} = r_{2h},\quad \pi_{x_3} = r_{3h}.$$

Для $\overset{\rho}{\omega}$ выполняется условие (8), (9), где

$\overset{\rho}{\omega} = (v_1 - u_1,\ v_2 - u_2,\ v_3 - u_3),\ \omega = (v_1 - u_1,\ v_2 - u_2)$,

$-r_h = \mu_0 v_{x_3\bar{x}_3} + \mu\Delta_h v - \hat{\nabla}P - f_h$,

$-r_{0h} = div_h v,\ r_{3h} = P_{x_3} - \rho g$,

где невязки $\overset{\rho}{r}_h = (r_{1h}, r_{2h}, r_{3h})$.

Рассмотрим вспомогательную разностную задачу

$$\mu_0 z_{x_3\bar{x}_3} + \mu\Delta_h z - \hat{\nabla}_h\varphi \quad r_h,$$

$$r_h \quad (r_{1h},\ r_{2h}),\ \vec{r}_h \quad (r_{1h}, r_{2h}, r_{3h}), \qquad (12)$$

$$\varphi_{\bar{x}_3} = r_{3h},\ \vec{z} \quad (z_1,\ z_2,\ z_3),\ div_h z \quad r_{0h},$$

$$\sum_{\Omega_4}\varphi h^3 = 0,\ z = (z_1, z_2),$$

$$z\Big|_{S_h} = 0,\ z_3\Big|_{\bar{x}=0} \quad z_3\Big|_{\bar{x}=1} \quad 0,$$

где Ω_h^1 – те точки $\overline{\Omega}_h$, где определен $\nabla_h\varphi$.

Будем использовать известную оценку [2]

$$\aleph_0^0\|\varphi\|_{L_2(\overline{\Omega}_h)} \le \sup_{\|\psi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_h)}=1} (\nabla\varphi,\ \psi)_{\Omega_h^1} \le$$

$$\le \aleph_4^1 \sup_{\|\psi\|_1=1}(\varphi, div_h\psi)_{\Omega_h^0}, \qquad (13)$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_h)$ – тот класс векторов функции, где сама сеточная функция и ее разностный аналог первого производного принадлежат $L_2(\Omega_h)$, и на границах S_h обращаются в ноль. В дальнейшем все постоянные зависят от данных задачи и постоянные неравенства вложения обозначим через C. Умножим (1.21) на $\vec{z}h^3$, суммируем по точкам Ω_h, в результате получим

$$\|z\|_1^2 - (\varphi, div_h z)_{\Omega_h^0} = (\vec{r}, z)_{\Omega_h}, \qquad (14)$$

$$\left|(\varphi, div_h z)_{\Omega_h^0}\right| \le \|\varphi\|_{L_2(\Omega_h^0)}\|div_h z\|_{\Omega_h^0} \le \|\varphi\|\|r_{0h}\|, \quad (15)$$

$$\left|(\vec{r}, z)_{\Omega_h}\right| \le \|\vec{r}\|\|z\|.$$

Используем неравенство Фридрихса

$$\|z\| \le C_\Omega\|z\|_1 \qquad (16)$$

и неравенство Гельдера из (14)–(16), получим

$$\|z\|_1^2 \le C\|\vec{r}_h\|^2 + \|\varphi\|\|r_{0h}\|. \qquad (17)$$

С учетом оценки (13) оцениваем $\nabla_h\varphi$ в негативной норме в уравнении (12):

$$\|\varphi\| \le C\left(\|z\|_1 + \|\vec{r}\|\right). \qquad (18)$$

Отсюда из (17), (18) получаем

$$\|\varphi\|^2 + \|z\|_1^2 \le C\left(\|\vec{r}_h\|^2 + \|r_{0h}\|^2\right) \le Ch^2. \quad (19)$$

Умножим (19) на $\vec{\omega}$, суммируем по Ω_h и, используя неравенство Гельдера, имеем

$$\|\omega\|_1^2 \le \left|(\pi, div\vec{\omega})_{\Omega_h^0}\right| + \left|(\vec{r}_h, \vec{\omega})\right|.$$

Используя неравенство (13), оцениваем

$$\|\pi\| \le C\left(\|\omega\|_1 + \|\vec{r}_h\| + \|r_{0h}\|\right).$$

Рассуждая также, как при получении оценки (19), выводим

$$\|\omega\|_1^2 \le C\left(\|\vec{r}_h\|^2 + \|r_{0h}\|^2\right).$$

Из последних неравенств следует, что

$$\|Q-P\|^2 + \|u-v\|_1^2 \le C\left(\sum_{i=1}^{3}\|r_{ih}\|^2\right) \le Ch^2.$$

Теорема 1 доказана.

Итерационный метод по физическим факторам. Рассмотрим полунеявный итерационный метод:

$$\mathrm{B}\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \mu_0 u^n_{x_3\bar{x}_3} + \mu\Delta_h u^n - \vec{f}_h,$$

$$\sum_{k=1}^{N} d\hat{i}v_h u^{n+1} = 0, \qquad (23)$$

$$\mathrm{B}\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} + \hat{\nabla}_h\xi^{n+1} = 0,$$

$$\mathrm{B}\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \quad \mu_0 u^n_{x_3\bar{x}_3} + \mu\Delta_h u^n - \hat{\nabla}_h\xi^{n+1} - \vec{f}_h^0$$

$$u^{n+1} = 0 \quad на \quad S_h, \quad u^0 = u_0, \quad x \in \Omega_h, \quad (24)$$

схема (20), (21) эквивалентна схеме

$$\sum_{k=1}^{N} d\hat{i}v_h u^{n+1} = 0,\ \xi^{n+1}_{x_3} = 0 \qquad (25)$$

с условиями (24).

Введем пространство $V_h^1(\Omega_h) \quad \Big\{\|u\|_1 \le C < \infty,$

$\sum_{k=1}^{N} d\hat{i}v_h u h_3 = 0,\ u = 0$ на границе $S_h\Big\}$. Пусть В – положительный ограниченный оператор, определенный на $V_h^1(\Omega)$. Схему (25), (24) можно записать в операторной форме

$$\mathrm{B}\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \mathrm{A}u^n - \vec{f}_h. \qquad (26)$$

Оператор А – проекция оператора $\mu_0 u_{x_3\bar{x}_3} +$ $+\mu\Delta_h u^n - \hat{\nabla}_h \xi^{n+1}$ в пространство $V_h^1(\Omega_h)$. Предположим, что

$$\gamma_1 \mathrm{B} \le \mathrm{A} \le \gamma_2 \mathrm{B},$$

γ_1, γ_2 – положительные постоянные. (27)

Из общей теории итерационных методов легко доказывается [1]:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (27). Тогда схема простой итерации (26) сходится к решению задач (20)–(22):*

$$\left\| u - u^{n+1} \right\| \le q^n \left\| u - u_0 \right\|, \quad q = \frac{1-\aleph}{1+\aleph}, \quad \aleph = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Для простоты предположим, что В = Е, тогда

$$\min\{\mu_0, \mu\} C_\Omega \mathrm{E} = \mathrm{A} \le \max\{\mu_0, \mu\} \frac{4}{h^2} \mathrm{E},$$

$$\gamma_1 = \min\{\mu_0, \mu\} C_\Omega, \quad \gamma_2 = \max\{\mu_0, \mu\} \frac{4}{h^2},$$

$$\aleph = \frac{\min\{\mu_0, \mu\} C_\Omega}{\max\{\mu_0, \mu\} 4 / h^2}.$$

Схема (23) реализуется следующим образом.

Находим из первого уравнения (24) $u^{n+1/2}$, с третьего уравнения (24) для ξ^{n+1} получаем уравнения Пуассона с условием типа Неймана. Отсюда находим ξ^{n+1}. Затем снова обращаемся к третьему уравнению (24) и определяем u^{n+1}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М., 1978. С. 590.

2. *Кобельков Г.М.* О численных методах решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорости-давления // Вычислительные процессы и системы. М., 1991. Вып. 8. С. 204-230.

Резюме

Мұхиттың сызықтық моделінің айырымдық сұлбасының жинақтылығы зерттелінген. Мұхит моделінің сызықтық айырымдық теңдеуінің итерациялық әдісінің физикалық факторлар бойынша жинақтылығы зерттелінген.

Summary

In work convergence of computing circuits of linear model of ocean is studied. Convergence of an iterative method under physical factors for the linear net equations of model of ocean is investigated.

Поступила 25.04.06г.