УДК 517.977.55

З. Н. МУРЗАБЕКОВ

СИНТЕЗ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается задача оптимального управления для систем с закрепленными концами траекторий. Разработан комбинированный метод построения синтезирующего управления с учетом ограничений на управления.

1. Синтез управляемых систем. Рассмотрим задачу оптимального управления: найти синтезирующее управление $u = u(x, t, x_0, t_0, T)$, доставляющее минимум функционалу

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(x, u, t)dt \qquad (1)$$

при условиях

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t_0 \le t \le T, \qquad (2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = 0, \qquad (3)$$

$$x \in R_n, \; u(t) \in U(t), \; t_0 \le t \le T. \qquad (4)$$

где $x \in R_n$ – вектор фазовых координат размерности $n \times 1$; $u = u(t)$ – вектор управления размерности $m \times 1$; $f(x,u,t)$ – функция размерности $n \times 1$.

Будем предполагать, что параметры управления $u(t)$ в каждый момент t принадлежат заданному ограниченному выпуклому замкнутому множеству $U(t)$, которое является подмножеством m – мерного евклидова пространства R_m. Векторная функция $f(x,u,t)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными по (x,u) при $(x,u,t) \in R_n \times U(t) \times [t_0,T]$.

Отметим, что управления $u = u(\cdot)$ предполагаются кусочно-непрерывными функциями на отрезке $[t_0,T]$; моменты t_0, T и точки $x(t_0)$, $x(T)$ заданы.

Обозначим через $\Delta(t_0,T,x_0)$ множество

$$\Delta(t_0,\ T,\ x_0) = \{(x,u):\ u(t) \in U(t),\ \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t),\ t_0 \le t \le T,\quad x(t_0) = x_0,\quad x(T) = 0\}. \quad (5)$$

Определение 1. Управление (построенное по принципу обратной связи) будем называть *синтезирующим управлением,* если:

1) управляющая функция непрерывным образом зависит от фазовых переменных;

2) комбинированный подход обеспечивает приведение системы в терминальное состояние за конечное время при наличии ограничений на управления;

3) управление минимизирует заданный функционал.

Введем в рассмотрение следующие конструкции:

$$v = v(x,t), \quad q(t) + \lambda_0(x,t) = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$M(x,u,t) =$$

$$= f_0(x,u,t) + (\lambda_0(x,t) + q(t))^* f(x,u,t) + \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (6)$$

Лемма 1. Если пара $(x(t),u(t)) \in \Delta(t_0,T,x_0)$, а функция $v(x(t),t)$ переменной t непрерывна и дифференцируема по t на отрезке $[t_0,T]$ и удовлетворяет условиям $\frac{\partial v}{\partial x} = \lambda_0(x,t) + q(t)$, $v(x(T),T) = 0$, то справедливо следующее представление функционала (1) при $u = u(t)$:

$$J^t = J^t(x(t),u(t)) =$$

$$= \int_t^T M(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + v(x(t),t). \quad (7)$$

Доказательство. Пусть существует функция $v(x(t),t)$ и справедливо

$$\frac{dv(x(t),t)}{dt} = (\lambda_0(x,t) + q(t))^* \dot{x}(t) + \frac{\partial v(x(t),t)}{\partial t}. \quad (8)$$

Так как $v(x(t),t)$ непрерывна по t, то получим из выражения (1) с учетом обозначения (6):

$$J^t = \int_t^T [M(x(\tau),u(\tau),\tau) - (\lambda_0(x(\tau),\tau) + q(\tau))^* \dot{x}(\tau) - \frac{\partial v}{\partial \tau}]d\tau . \quad (9)$$

Отсюда, суммируя полученное выражение с (8) при выполнении условия $v(x(T),T) = 0$, получаем утверждение леммы.

Для определения пары $\{x^\Delta(t),u^\Delta(t)\}$, минимизирующего функционал

$$J(x(t),u(t)) = \int_{t_0}^T M(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + v(x(t_0),t_0), \quad (10)$$

необходимо найти такое управление и множители $\lambda = \lambda_0(x,t) + q(t)$, чтобы:

1) при каждом фиксированном $t \in [t_0,T]$ функция $M(x,u,t)$ достигала наименьшего значения среди всех $(x,u) \in \Delta(t_0,T,x_0)$;

2) пара $\{x^\Delta(t),u^\Delta(t)\}$ удовлетворяла дифференциальному уравнению (2) с условиями (3) и (4).

Допустимая пара $(x^\Delta(t),u^\Delta(t)) \in \Delta(t_0,T,x_0)$ называется оптимальной, если

$$\inf_{\Delta(t_0,T,x_0)} J(x(t),u(t)) =$$

$$= J(x^\Delta(t),u^\Delta(t)) = J(u^\Delta(t)). \quad (11)$$

Управление $u^\Delta(t)$ будем называть оптимальным управлением, $x^\Delta(t) = x(u^\Delta,t)$ – оптимальной траекторией, а пару $(x^\Delta(t),\ u^\Delta(t))$ – оптимальным решением рассматриваемой задачи.

Теперь сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. Для оптимальности пары $(x^{\Delta}(t),u^{\Delta}(t))\in\Delta(t_0,T,x_0)$ в задаче (1)–(4) достаточно существования функции $v(x,t)$ такой, что формула (7) верна для любой допустимой пары $(x(t),u(t))\in\Delta(t_0,T,x_0)$ и выполняется следующее условие:

При каждом фиксированном $t\in[t_0,T]$ функция

$$M(x,u,t)=f_0(x,u,t)+(\lambda_0(x,t)+$$
$$+q(t))^{*}f(x,u,t)+\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \quad (12)$$

достигает наименьшего значения:

$$\inf_{x\in E_n}\inf_{u\in U(t)}M(x,u,t)=M_{\min}(t)=$$
$$=M(x^{\Delta}(t),u^{\Delta}(t),t),\ t\in[t_0,T]. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть существуют функция $v(x,t)$, удовлетворяющая условию теоремы и произвольная допустимая пара $(x(t),u(t))\in\Delta(t_0,T,x_0)$, тогда согласно формуле (7) будем иметь

$$J(x(t),u(t))-J(x^{\Delta}(t),u^{\Delta}(t))=$$
$$=\int_{t_0}^{T}[M(x(t),u(t),t)-M(x^{\Delta}(t),u^{\Delta}(t),t)]dt+$$
$$+v(x_0,t_0)-v(x_0^{\Delta},t_0)=$$
$$=\int_{t_0}^{T}[M(x(t),u(t),t)-M_{\min}(t)]dt+v(x_0,t_0)-$$
$$-v(x_0^{\Delta},t_0)\geq 0,$$

отсюда следует

$$J(u^{\Delta}(t))=\inf_{\Delta(t_0,T,x_0)}J(x(t),u(t)). \quad (14)$$

Теорема доказана.

2. Конструирование стационарных линейных систем управления. Рассмотрим управляемую линейную систему

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ t\in[t_0,T], \quad (15)$$

$$x(t_0)=x_0,\ x(T)=x_1=0, \quad (16)$$

$$u(t)\in U(t)=\{u\,|\,\alpha(t)\leq u(t)\leq\beta(t),t\in[t_0,T];$$
$$\alpha,\beta\in C[t_0,T],\alpha<0,\beta>0\}\subset L_2([t_0,T],R_m), \quad (17)$$

где $x(t)$ – вектор состояния объекта управления размерности $n\times 1$; $u=u(t)$ – вектор управляющих воздействий размерности $m\times 1$; A, B – постоянные матрицы размерности $n\times n$, $n\times m$ соответственно; $\alpha(t),\beta(t)$ – непрерывные функции размерности $m\times 1$; $x(t_0)$, $x(T)$ – заданные векторы фазовых координат системы.

Будем предполагать, что система (15) управляема, т.е.

$$ranq[B\ AB\ A^2B.....A^{n-1}B]=n$$

или

$$\overline{W}(t_0,T)=\int_{t_0}^{T}e^{At}BB^{*}e^{A^{*}t}dt>0.$$

Обозначим через $\Delta(t_0,T,x_0)$ множество всех допустимых управлений, удовлетворяющих условию $u(t)\in U(t)$, $t\in[t_0,T]$, и соответствующих траекторий $x(t,u)$ системы (15), определенных на отрезке $t_0\leq t\leq T$, т.е. множество

$$\Delta(t_0,\ T,\ x_0)=\{(x,u):\ u(t)\in U(t),$$
$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),$$
$$t_0\leq t\leq T,\quad x(t_0)=x_0,\quad x(T)=0\}.$$

Пусть задан функционал

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[x^{*}Qx+u^{*}Ru]dt, \quad (18)$$

где Q, R – постоянные, симметричные матрицы, причем Q является неотрицательно определенной, R – положительно определенной.

Задача 2. Найти синтезирующее управление $u^{\Delta}(x,t,x_0,t_0,x_1,T)$ такое, что соответствующая ему пара $\{x(t),u(t)\}$ доставляет минимальное значение функционалу (18), где

1) $x(t)$ является решением дифференциального уравнения (15) при $u=u^{\Delta}(x,t,x_0,t_0,x_1,T)$ с граничными условиями (16);

2) $u(t)=u^{\Delta}(x(t),t,x_0,t_0,x_1,T)$ удовлетворяет ограничениям (17).

Для решения поставленной задачи образуем вспомогательный критерий качества с применением множителей Лагранжа специального вида, предложенный в работе [1]. Прибавим к функционалу (18) систему дифференциальных уравнений (15) с множителем $\lambda = Kx + q$ и дополнительно следующее выражение:

$\varphi_1^*(\alpha - u) + \varphi_2^*(u - \beta)$, где $\varphi_1 \geq 0,\ \varphi_2 \geq 0$.

Тогда получим следующий функционал:

$$J^t = \frac{1}{2}x^*(t)Kx(t) + q^*(t)x(t) +$$

$$+\int_t^T [-\varphi_1^*(\alpha - u) - \varphi_2^*(u - \beta)]d\tau +$$

$$+\int_t^T [\frac{1}{2}x^*Qx + \frac{1}{2}u^*Ru + (q + Kx)^*(Ax + Bu) + x^*\dot{q} +$$

$$+\varphi_1^*(\alpha - u) + \varphi_2^*(u - \beta)]d\tau. \qquad (19)$$

Введем в рассмотрение следующие конструкции:

$$\bar{v}(x,t) = \frac{1}{2}x^*Kx + x^*q(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_t^T [\bar{\varphi}^*R\bar{\varphi} - \varphi_1^*(\alpha - u) \ \ -\varphi_2^*(u - \beta)]d\tau,$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \lambda = Kx + q,$$

$$\bar{M}(x,u,t) = \frac{1}{2}x^*Qx + \frac{1}{2}u^*Ru +$$

$$+(Kx + q)^*(Ax + Bu) + x^*\dot{q} +$$

$$+\varphi_1^*(\alpha - u) + \varphi_2^*(u - \beta) - \frac{1}{2}\bar{\varphi}^*R\bar{\varphi}. \qquad (20)$$

Тогда справедливо следующее представление функционала:

$$J^t = \bar{v}(x,t) + \int_t^T \bar{M}(x,u,\tau)d\tau. \qquad (21)$$

Для решения поставленной задачи 2 применим теорему 1 следующим образом. Проводим выбор $(x, u, K, q, \varphi_1, \varphi_2, \bar{\varphi})$ таким образом, чтобы при каждом фиксированном $t \in [t_0, T]$ функция $\bar{M}(x,u,t)$ достигала наименьшего значения на паре (x^Δ, u^Δ) и чтобы функция x^Δ удовлетворяла дифференциальному уравнению (15) при управлении $u^\Delta = u(x,t,x_0,t_0,T)$ с условиями (16), (17). Тогда такая пара $(x^\Delta(t), u^\Delta(t))$ будет оптимальной по отношению к функционалу $J(u)$ вида (18).

Управление, доставляющее безусловный минимум функционалу,

$$J(x,u) = \bar{v}(x(t_0),t_0) + \int_{t_0}^T \bar{M}(x,u,\tau)d\tau \qquad (22)$$

находим из следующего условия при каждом фиксированном $t \in [t_0, T]$:

$$\inf_{x \in E_n} \inf_{u \in E_m} \bar{M}(x,u,t) = \bar{M}_{\min}(t)$$

в следующем виде:

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial u} = 0,$$

$$u^\Delta = -R^{-1}[B^*(Kx + q) - \varphi_1 + \varphi_2]. \qquad (23)$$

Пусть $w = -R^{-1}B^*(Kx + q),\ \ \bar{\varphi} = -R^{-1}[-\varphi_1 + \varphi_2]$.

Функции $\varphi_1,\ \varphi_2$ определим таким образом, чтобы выполнялись условия:

$$\varphi_1^*(\alpha - u^\Delta) = 0,\ \varphi_2^*(u^\Delta - \beta) = 0. \qquad (24)$$

Рассмотрим следующие варианты:

1) если $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0$, то $u^\Delta = w$;

2) если $\varphi_1 = R(\alpha - w),\ \varphi_2 = 0$, то $u^\Delta = w + R^{-1}R(\alpha - w) = \alpha$;

3) если $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = R(w - \beta)$, то $u^\Delta = w - R^{-1}R(w - \beta) = \beta$.

Тогда осуществим выбор $\varphi_1,\ \varphi_2, \bar{\varphi}$ следующим образом:

$$\varphi_1 = -R\inf(0, w - \alpha),$$

$$\varphi_2 = -R\inf(0, \beta - w),$$

$$\bar{\varphi} = -\inf(0, w - \alpha) + \inf(0, \beta - w).$$

Теперь определим функцию $\bar{M}(x,u,t)$ на управлении, задаваемой формулой $u^\Delta = w + \bar{\varphi}$ в следующем виде:

$$\bar{M}(x,t) = \frac{1}{2}x^*[Q + KA + A^*K - KBR^{-1}B^*K]x -$$

$$-\frac{1}{2}q^*BR^{-1}B^*q + x^*[\dot{q} + A^*q - KBR^{-1}B^*q]. \qquad (25)$$

Пусть матрица K является решением уравнения

$$KA + A^*K - KBR^{-1}B^*K + Q = 0, \qquad (26)$$

а вектор-функция $q(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\dot{q} = -(A - BR^{-1}B^*K)^* q\,, \qquad (27)$$

тогда имеем

$$\overline{M}_{\min}(t) = -\frac{1}{2}q^* BR^{-1}B^* q. \qquad (28)$$

Действительно, при таком выборе матрицы K и функции q функцию $\overline{M}(x,u,t)$ можно привести к следующему виду:

$$\overline{M}(x,u,t) = \frac{1}{2}[u + R^{-1}B^*(K\ \ x + q) - \overline{\varphi}]^* \times$$

$$\times R[u + R^{-1}B^*(K\ \ x + q) - \overline{\varphi}] -$$

$$-\frac{1}{2}q^* BR^{-1}B^* q, \quad t \in [t_0, T], \qquad (29)$$

Поскольку R – положительно определенная матрица, то отсюда следует, что функция $\overline{M}(x,u,t)$ достигает минимального значения (28) на управлении, задаваемом формулой (23).

Подставляя выражения (23) и (28) в функционал (22), приведем J^0 к виду

$$J^0 = \frac{1}{2}x^*(t_0)Kx(t_0) + x^*(t_0)q(t_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[\overline{\varphi}^*(t)R\overline{\varphi}(t) - q^*(t)B_1 q(t)]dt. \qquad (30)$$

Дифференциальное уравнение, определяющее закон движения системы (15) с управлением $u^\Delta = w + \overline{\varphi}$, представим в следующем виде:

$$\dot{x} = A_1 x - B_1 q + B\overline{\varphi}, \qquad (31)$$

$$\dot{q} = -A_1^* q \qquad (32)$$

с условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = 0\,, \qquad (33)$$

где обозначено

$$A_1 = A - BR^{-1}B^*K,\ \ B_1 = BR^{-1}B^*,$$

$$\overline{\varphi} = -\inf(0, w - \alpha) + \inf(0, \beta - w)\,,$$

$$w = -R^{-1}B^*(Kx + q)\,.$$

Для дифференциального уравнения (32) находим начальное условие $q(t_0)$, которое обеспечивает выполнение условия $x(T) = 0$ в виде

$$q(t_0) = W^{-1}(t_0, T)[x(t_0) +$$

$$+\int_{t_0}^{T} e^{A_1(t_0-\tau)}B\overline{\varphi}(\tau)d\tau]\,. \qquad (34)$$

Результаты, установленные для задачи 2, сформулируем в виде следующего утверждения:

Теорема 2. Для оптимальности пары $(x^\Delta(t), u^\Delta(t)) \in \Delta(t_0, T, x_0)$ в задаче 2 необходимо и достаточно, чтобы:

1) $x^\Delta(t)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = A_1 x - B_1 q + B\overline{\varphi}$$

с условиями $x(t_0) = x_0$, $x(T) = 0$;

2) управление $u^\Delta(t)$ определяется следующим образом:

$$u^\Delta(t) = u(x^\Delta(t), t, x_0, t_0, x_1, T) =$$

$$= -R^{-1}B^*(Kx^\Delta(t) + q(t)) + \overline{\varphi}(t) =$$

$$= -R^{-1}B^*\{Kx^\Delta(t) + e^{-A_1^*(t-t_0)}W^{-1}(t_0, T)[x_0 +$$

$$+\int_{t_0}^{T} e^{A_1(t_0-\tau)}B\overline{\varphi}(\tau)d\tau]\} + \overline{\varphi}(t),$$

где матрица K является решением уравнения (26), функция $q(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (27), а функция $\overline{\varphi}(t)$ определяется следующим образом:

$$\overline{\varphi}(t) = -\inf(0, w(t) - \alpha(t)) + \inf(0, \beta(t) - w(t))\,,$$

$$w(t) = -R^{-1}B^*(Kx^\Delta(t) + q(t))\,.$$

Следует отметить, что решения уравнений (31), (32) удовлетворяют соотношению

$$x(t) = e^{A_1(t-t_0)}[x(t_0) - \int_{t_0}^{T} e^{A_1(t_0-\tau)}B_1 q(\tau)d\tau +$$

$$+\int_{t}^{T} e^{A_1(t_0-\tau)}B_1 q(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{T} e^{A_1(t_0-\tau)}B\overline{\varphi}(\tau)d\tau -$$

$$-\int_{t}^{T} e^{A_1(t_0-\tau)}B\overline{\varphi}(\tau)d\tau] =$$

$$= \int_{t}^{T} e^{A_1(t-\tau)}B_1 q(\tau)d\tau - \int_{t}^{T} e^{A_1(t-\tau)}B\overline{\varphi}(\tau)d\tau.$$

Отсюда находим

$$x(t) = W(t,T)q(t) - \int_{t}^{T} e^{A_1(t-\tau)}B\overline{\varphi}(\tau)d\tau,\ t \in [t_0, T]\,.$$

Система дифференциальных уравнений (31), (32) при нулевых начальных условиях $x(t_0)=0,\ q(t_0)=0$ имеет единственное решение $x(t)\equiv 0,\ q(t)\equiv 0$. Из теоремы о необходимых и достаточных условиях существования и единственности решения краевых задач для линейных систем [2] следует, что краевая задача (31), (32) также имеет единственное решение.

Комбинированный подход представляется весьма эффективным и позволяет строить управления, основанные на принципе обратной связи, учитывающие состояние системы, краевые условия и ограничения на управления. Кроме того, этот подход подсказывает путь определения функции $v(x,t)$, который связан с минимальным значением функционала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мурзабеков З.Н.* Синтез управляемых динамических систем. Алматы: қазақ университеті, 2004. 346 с.

2. *Васильев Н.И., Клоков Ю.А.* Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинатне, 1978. 247 с.

Резюме

Траекторияларының шеттері бекітілген тиімді басқару есебі қарастырылады. Басқаруға шектеу қойылған жағдайда сызықты жүйелерді тиімді басқару алгоритмі алынды.

Summary

The main issue is the problem of optimal control with fixed ends of the trajectory. Algorithm of optimal control for linear systems with restrictions on control is obtained.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Поступила 27.04.06 г.