УДК 621.01:539.3

Л. А. ХАДЖИЕВА

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН С УЧЕТОМ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Рассматривается моделирование движения упругих стержневых систем с позиций теории конечных деформаций В. В. Новожилова [1]. Уравнения движения системы получают с помощью энергетических методов. Рассмотрен случай плоского движения элементов машин при второй системе упрощений В. В. Новожилова.

Исследуется динамика упругих стержневых элементов машин с учетом конечных деформаций. Учет упругих свойств элементов машин, существенно влияющих на динамические характеристики машин и их функциональные возможности, привлекает все большее внимание исследователей. Авторы большинства работ моделируют движение деформируемых элементов машин в рамках классической (линейной) теории упругости. Упругое движение элементов машин представляют как наложение колебательного процесса, возникающего в результате деформации, на их движение как абсолютно жестких тел.

Динамическая модель, будучи линейной относительно упругих деформаций элементов, включает нелинейную инерционную связь между упругим движением элемента и его номинальным состоянием. Эти модели ограничены и существенно сужают круг исследуемых задач, поскольку допущения о малости деформаций упругих элементов, лежащие в основе линейной динамической модели, для некоторого класса задач не всегда корректны и ведут к неадекватности модели реальным явлениям и процессам. К подобным задачам относится движение стержневых систем. Ярким примером таковых являются манипуляторы, динамика пространственного движения которых сильно нелинейна. Проблемой стержневых систем является учет осевых усилий. Они имеют принципиальное значение для систем, где кривошипы и шатуны соизмеримы размерами [2]. В этом случае возникает необходимость учета продольных перемещений звеньев.

С другой стороны, стержневые элементы являются гибкими элементами и согласно [1] конечность углов поворота сечений ведет к неуместности классической теории упругости при моделировании их движения.

Здесь рассматривается моделирование динамики стержневых элементов машин в рамках теории конечных деформаций В. В. Новожилова, где компоненты деформаций задаются как [1]

$$\varepsilon_{xx} = e_{xx} + 0,5\left[e_{xx}{}^2 + \left(0,5e_{xy} + \omega_z\right)^2 + \left(0,5e_{xz} - \omega_y\right)^2\right];$$

$$\varepsilon_{yy} = e_{yy} + 0,5\left[e_{yy}{}^2 + \left(0,5e_{xy} - \omega_z\right)^2 + \left(0,5e_{yz} + \omega_x\right)^2\right];$$

$$\varepsilon_{zz} = e_{zz} + 0,5\left[e_{zz}{}^2 + \left(0,5e_{xz} + \omega_y\right)^2 + \left(0,5e_{yz} - \omega_x\right)^2\right];$$

$$\varepsilon_{xy} = e_{xy} + e_{xx}\left(0,5e_{xy} - \omega_z\right) + e_{yy}\left(0,5e_{xy} + \omega_z\right) + \left(0,5e_{xz} - \omega_y\right)\left(0,5e_{yz} + \omega_x\right); \quad (1)$$

$$\varepsilon_{xz} = e_{xz} + e_{xx}\left(0,5e_{xz} + \omega_y\right) + e_{zz}\left(0,5e_{xz} - \omega_y\right) + \left(0,5e_{xxy} + \omega_z\right)\left(0,5e_{yz} - \omega_x\right);$$

$$\varepsilon_{yz} = e_{yz} + e_{yy}\left(0,5e_{yz} - \omega_x\right) + e_{zz}\left(0,5e_{yz} + \omega_x\right) + \left(0,5e_{xy} - \omega_z\right)\left(0,5e_{xz} + \omega_y\right).$$

Согласно [3] полагаем, что в общем случае трехмерного деформирования стержней его поперечное сечение совершает поступательное перемещение вдоль оси стержня x, поступательное перемещение при сдвиге в плоскости yz, поворот вокруг осей y и z в результате изгиба и поворот при кручении относительно оси x. Депланацией сечения в результате сдвига пренебрегаем. Тогда перемещения любой точки стержня задаем выражениями [3]:

$$U(x,y,z,t) = u(x,t) - \frac{\partial w_1(x,t)}{\partial x} z_1 - \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} y_1 + \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}_1 \varphi(\eta_1,\xi_1);$$

$$V(x,y,z,t)=v_1(x,t)+v_2(x,t)-\theta(x,t)z\ ;$$

$$W(x,y,z,t)=w_1(x,t)+w_2(x,t)+\theta(x,t)y, \qquad (2)$$

где $v_1(x,t), w_1(x,t)$ – перемещения центра изгиба поперечного сечения вдоль осей y, z вследствие изгиба; $v_2(x,t), w_2(x,t)$ – перемещения центра изгиба поперечного сечения вдоль осей y, z вследствие сдвига; $\theta(x,t)$ – угол поворота сечения относительно центра изгиба; $\varphi(\eta_1,\xi_1)$ – функция кручения, зависящая от формы сечения; $u(x,t)$ – поступательное смещение сечения вдоль оси x.

Соотношения (1) и (2) дают общую картину деформирования в окрестности произвольной точки стержня при его конечных деформациях.

Уравнения движения системы строятся на применении энергетических методов.

Потенциальная энергия деформации стержня определяется по формуле Клапейрона. Для трехмерного случая она задается

$$U=\iiint\limits_V \Phi dV=\frac{1}{2}\iiint\limits_V \sigma_{jk}\varepsilon_{jk}dV\ . \qquad (3)$$

Для случая конечных деформаций элементов (1) функционал Φ определяем следующим образом:

$$\Phi=\frac{G(1-\nu)}{1-2\nu}\{(e_{xx}+0,5(\omega_y{}^2+\omega_z{}^2))^2+$$
$$+(e_{yy}+0,5(\omega_x{}^2+\omega_z{}^2))^2+(e_{zz}+0,5(\omega_x{}^2+\omega_y{}^2))^2\}+$$
$$+\frac{2G\nu}{1-2\nu}\{(e_{xx}+0,5(\omega_y{}^2+\omega_z{}^2))\times$$
$$\times(e_{yy}+0,5(\omega_x{}^2+\omega_z{}^2))+(e_{xx}+0,5(\omega_y{}^2+\omega_z{}^2))\times$$
$$\times(e_{zz}+0,5(\omega_x{}^2+\omega_y{}^2))+(e_{yy}+0,5(\omega_x{}^2+\omega_z{}^2))\times$$
$$\times(e_{zz}+0,5(\omega_x{}^2+\omega_y{}^2))\}+2G\{(e_{xy}-\omega_x\omega_y)^2+$$
$$+(e_{yz}-\omega_y\omega_z)^2+(e_{xz}-\omega_z\omega_x)^2\};$$
$$(e_{xx}+0,5(\omega_y{}^2+\omega_z{}^2))^2+(e_{yy}+0,5(\omega_x{}^2+\omega_z{}^2))^2+$$
$$+(e_{zz}+0,5(\omega_x{}^2+\omega_y{}^2))^2. \qquad (4)$$

При выводе уравнений движения системы стержневых элементов необходимо обеспечение связи между элементами через кинематические пары. Граничные условия на концах элементов определяются условиями опираний. В отличие от несвязанного элемента, когда его движение можно задать локально и решение уравнений не представляет труда, связи, накладываемые на связанную систему элементов, приводят к усложнению задачи. В этом случае движение всей системы необходимо определять в глобальной системе координат, задавая номинальное движение элементов и упругие перемещения, возникающие в результате их деформации.

Кинетическую энергию элементов определяем следующим образом:

$$T=\frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho(\dot{\bar{R}}\dot{\bar{R}})dV, \qquad (5)$$

где $\bar{R}$ – радиус-вектор, определяющий положение элемента после упругой деформации в инерциальной системе координат.

Построение динамической модели с учетом нелинейных соотношений (1) и (4) не всегда представляется необходимым и возможным. В зависимости от геометрии элементов и типа их деформирования целесообразны те или иные упрощения модели. Известно, что в случае деформирования стержневых элементов углы поворота волокон значительно превосходят удлинения и сдвиги [1]. Ввиду малости последних можно пренебречь их квадратами в соотношениях (1). Это упрощение соответствует второй системе упрощений по В. В. Новожилову и лежит в основе гипотезы плоских сечений.

Для случая плоских стержневых систем, рассматривая поле продольных и поперечных перемещений и пренебрегая депланацией сечения стержня в результате сдвига, соотношения (2) задаем как:

$$U(x,y,z,t)=u(x,t)-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}y\ ;$$
$$V(x,y,z,t)=v(x,t)\ ; \qquad (6)$$
$$W(x,y,z,t)=0.$$

Вводя вторую систему упрощений по В. В. Новожилову для соотношений (1) и моделируя упругие шатуны плоских механизмов шарнирно-опертыми балками, а кривошип – консолью (см. рис.), получаем кинетическую и потенциальнуюэнергию i-го звена:

$$T_i=\frac{m_i}{2}\int_0^{l_i}(\dot{X}_i\cos\theta_i+\dot{Y}_i\sin\theta_i+\dot{u}_i-v_i\dot{\theta}_i)^2dx+ \qquad (7)$$
$$+\frac{m_i}{2}\int_0^{l_i}(\dot{Y}_i\cos\theta_i-\dot{X}_i\sin\theta_i+\dot{v}_i+x_i\dot{\theta}_i+u_i\dot{\theta}_i)^2dx,$$

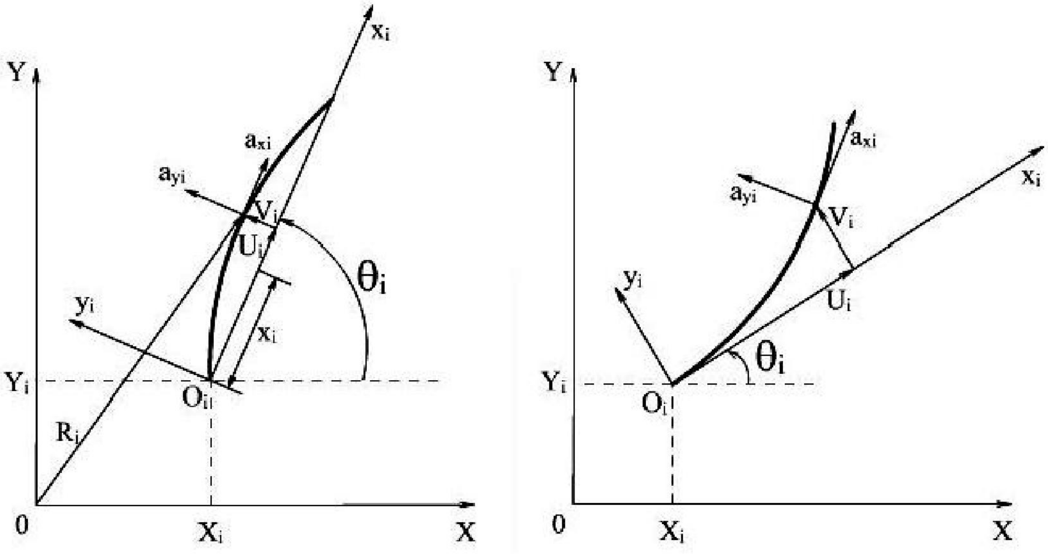

Схема упругого движения шатунов (*а*) и кривошипа (*б*)

$$U = \frac{EJ_y}{2}\int_0^{l_i}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx +$$

$$+\frac{EF}{2}\int_0^{l_i}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^4\right]dx. \quad (8)$$

Допуская малость удлинений и сдвигов и пренебрегая квадратами углов поворота в (1) и (4), можно перейти, как и в большинстве работ, к моделированию движения стержневых систем в рамках классической теории упругости. В этом случае энергия упругой деформации будет

$$U = \frac{EJ_y}{2}\int_0^{l_i}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{EF}{2}\int_0^{l_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \quad (9)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. 211 с.

2. *Чжу, Пан.* Динамика быстроходного кривошипно-шатунного механизма с упругим шатуном // Констр. и техн. машиностроения. 1975. .№ 2. С. 148-156..

3. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М., 1970. 737 с.

Резюме

Ақырлы деформация теориясы тұрғысынан серпімді сырықты жүйесі қозғалысын пішіндеуі қарастырылады. Жүйенің қозғалыс теңдеулері энергетикалық әдістерді қолдану арқылы алынады. Машина элементтерінің жазықтық қозғалысы В.В. Новожилов ұсынған ықшамдаудың екінші жүйесі жағдайында қарастырылған.

Summary

Simulation of the elastic rod systems movement is considered using the V. V. Novozhilov's theory of finite deformations. Using the energy method the system's equations has been obtained. The plane motion of machine's elements at the second system of V. V. Novozhilov's simplifications is considered as well.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Поступила 30.03.06 г.