

УДК 53:519.25; 551.521

Е. Г. ЯРМУХАМЕДОВ

ПЛОТНОСТЬ МОЛЕКУЛ В СРЕДНЕЙ АТМОСФЕРЕ. Ч. II

Приведено решение основной задачи и рассмотрены метод восстановления, способы введения в рассмотрение параметра «давление», формальное решение основной задачи, анализ способа решения, анализ корректности полученного решения, оценка решения, влияние принятия полученного решения на оценки озонового слоя Земли и рабочего диапазона лидара.

§4. Задача восстановления: постановка и пути решения

Вначале отметим сам факт перехода к локальному формату представления состояния системы в интенсивных параметрах $x = (V/N)$ и $s = (S/N)$ – удельным объему и энтропии соответственно. Тогда в основной задаче внешним представлением будет [1, §3]:

$$\psi_{\text{осн}} = (T, p), \quad (1)$$

а полным представлением состояния системы –

$$\Psi_{\text{осн}} = \{T, pfs, x\}. \quad (2)$$

Воспользовавшись информативной равноценностью величин p и x , вместо основной будем рассматривать упомянутую в §3 [1] основную термодинамическую задачу, которую, в свою очередь, заменим другой, более общей задачей.

Задача восстановления: исходя из заданного представления (1) термодинамического состояния локально-равновесной газовой системы требуется восстановить его полное представление в виде (2).

Покажем сложность решения основной термодинамической задачи по предполагаемому решению задачи восстановления. Допустим, что известно полное уравнение состояния системы, которое с учетом вида (2) представления $\Psi_{\text{осн}}$ выражается как

$$F(T, pfs, x) = 0.$$

Разрешая его относительно x , получаем

$$x = f(T, pfs). \quad (3)$$

Очевидно, что полученная гипотетически представляемым способом общая формула (3) дает только решение основной задачи, которое зависит параметрически от удельной энтропии, **потому одного уравнения состояния недостаточно для решения основной задачи.**

Поиск способа обойти необходимость определения неизвестного параметра s в формуле (3) наводит на мысль проанализировать ситуацию, когда заданы s и x , а необходимо найти T и p . В развитие этой мысли поставим следующие две задачи, обратные задаче восстановления.

З а д а ч а I: даны удельные энтропия s и объем x газовой системы, т.е. известно внешнее представление состояния $\psi_I = \{s, x\}$; восстановить полное представление $\Psi_I = \{s, x, T, p\}$. **Задача II:** даны температура T и удельный объем x газовой системы, т.е. известно представление $\psi_{II} = \{T, x\}$; восстановить полное представление $\Psi_{II} = \{T, x, fs, p\}$.

§5. Три способа ввести в рассмотрение параметр «давление»

Постановка задачи I заставляет обратить внимание на термодинамически сопряженный с искомой величиной x параметр p .

1. Теоретический способ. Согласно канонической процедуре [2] обобщенная сила давления X_p , возникающая как реакция системы на изменение параметра V (объем системы), определяется следующим образом:

$$X_p = - \left(\frac{\partial H_{\text{тд}}}{\partial V} \right)_{(\dots)}, \quad (1)$$

где $H_{\text{тд}}$ – «термодинизированный» (см. ниже) гамильтониан равновесной системы; индекс (...) – совокупность фиксированных условий взятия частной производной в (1).

Тогда теоретический параметр P давления системы вводится в рассмотрение по изложенной в п. 3 §2 [1] «процедуре термодинамического параметра», т.е. как следующая двойка: $P = \{fX_p, f_{\text{тд}}; [X_p]\}$.

По принципу аддитивности [3] имеем $H_{\text{тд}} = N \cdot h_{\text{тд}}$, где N – число частиц в системе; $h_{\text{тд}}$ – «термодинизированный» гамильтониан

молекулы газа. Для молекулы совершенного газа в поле тяжести Земли справедливо: $h_{\text{мол}} = \pi^2/2m + mgz$, где m – масса молекулы совершенного газа; p – модуль импульса молекулы; z – высота над нулевым уровнем. Тогда, «термодинизируя» величину $h_{\text{мол}}$, что означает осреднение по соответствующему ансамблю Гиббса и континуализацию корпускулярной величины m , т.е. представление $m = \rho \cdot \epsilon$, где ρ – массовая плотность газа или параметр континуализации [1, §2], получаем:

$$H_{\text{тд}} = \langle p^2 \rangle / (2\rho \epsilon) + \rho \epsilon g \cdot \langle z \rangle.$$

Подставляя выражение для $h_{\text{тд}}$ в формулу (1), приходим к следующему результату:

$$P = n \cdot e_{\text{кин}} + n \cdot e_{\text{пот}}, \quad (2)$$

где $n = \chi^{-1}$ – молекулярная (счетная) плотность; ϵ – среднее значение соответствующей по индексу (кинетической или потенциальной) энергии молекулы. Легко видеть, что выражение (2) выполняется и для структурной молекулы идеального газа, когда $e_{\text{кин}} = e_{\text{поступ}} + e_{\text{вращат}}$.

Итак, внутреннее свойство системы реагировать на возмущение ее объема V характеризуется теоретическим или согласно терминологии п. 4 §2 [1] композиционным параметром $P = P_1 + P_2(h)$ с калибровкой по нулевому уровню высоты $P_2(h=0) \equiv 0$, а потому $P(h=0) = P_1$.

2. Лабораторный способ. В феноменологической термодинамике вместо теоретического параметра P используемой величиной является так называемый лабораторный параметр давления $p_{\text{лаб}}$, который и называют в общем употреблении давлением p . Тем самым, как само собой разумеющийся факт, принимается отождествление: $p_{\text{лаб}} \equiv p$.

В основе обсуждения процедуры введения в рассмотрение параметра $p_{\text{лаб}}$ лежат два обстоятельства. Во-первых, это негласное привнесение в аксиоматику феноменологической термодинамики из ньютоновской механики ее второго закона. А он, во-вторых, напрямую используется в постулируемом по способу измерения определении: «Давление (лабораторное) в газовой системе есть сила ее молекулярного воздействия на единичную площадку».

Указанные обстоятельства при молекулярно-кинетическом рассмотрении механизма эмпирического давления приводят к хорошо известному результату:

$$p_{\text{лаб}} = (2/3) \cdot n \cdot e_{\text{поступ}}. \quad (3)$$

3. Термодинамический способ введения в рассмотрение параметра $p_{\text{тд}} = [p_1 + p_2(h)]_{\text{тд}}$, соответствующего п.3 §2 [1], заключается в выполнении условия об инвариантном согласовании композиционного $P = P_1 + P_2(h)$ и лабораторного $p_{\text{лаб}}$ параметров посредством определяющего условия: $(p_1)_{\text{тд}} \equiv p_{\text{лаб}}$.

Учитывая, что $e_{\text{кин}} = (f/2) \cdot kT$, где f – число степеней свобод механического движения молекулы идеального газа, а $e_{\text{пост}} = (3/2) \cdot kT$, получим $(p_1)_{\text{тд}} = (2/f) \cdot P_1$, а потому и $(p_2)_{\text{тд}} = (2/f) \cdot P_2$. Или окончательно

$$p_{\text{тд}} = p_{\text{лаб}} \cdot \theta [1 + (2/f) \theta (mgh / kT)]. \quad (4)$$

§6. Решение основной задачи

В основу подхода к решению поставленной задачи положен базовый тезис о том, что универсальность ортодоксальной термодинамики нельзя понимать в смысле применимости ее методов к мега-объекту как к некоему целому. Поэтому следует четко отличать друг от друга конкретную задачу атмосферной физики от конкретной задачи термодинамики и не путать термодинамический подход к решению атмосферной задачи с решением некоторой термодинамической задачи.

В формулировке основной задачи содержатся три условия: $\{p_i\}$, $\{T_i\}$, $\{h_i\}$ [1, §1]. Из них два первых условия – $\{p_i\}$, $\{T_i\}$ – указывают на возможные пути решения (или термодинамический, или статистический), а третье – $\{h_i\}$ – классифицирует задачу как атмосферную. Это последнее условие является таким же необходимым и, если угодно, имманентно присущим элементом данной задачи, как и первые два условия. Без него основная задача переходит в класс термодинамических задач.

Из изложенного следуют два вывода: 1) если полученное некоторым способом решение основной задачи не зависит параметрически от h , то этот факт является прямым игнорированием условия $\{h_i\}$, а потому такое решение неверно потому, что оно не может представлять собой решение основной задачи вообще; 2) для того что-

бы с помощью некоторого термодинамического соотношения получить решение основной задачи, необходимо провести **ковариантное** относительно сдвига $[h|0]$ **преобразование** всех величин, которые входят в это соотношение.

Из первого вывода и следует вывод о несправедливости традиционного решения основной задачи, сделанный в [1, §1]. Второй вывод дает ключ к решению поставленной задачи термодинамическим способом.

Для решения основной задачи предлагается ковариантно преобразовать аксиоматику термодинамики, начиная, во-первых, с ввода в рассмотрение гамильтоновой величины «теоретического параметра давления P » и, во-вторых, с согласования последней с величиной «лабораторного давления $p_{\text{лаб}}$ ». В результате такой двойной операции появляется величина, которая называется «термодинамическим параметром давления $p_{\text{тд}}$ » (§5).

Вместе с этим появляется и необходимость ввести и использовать при рассмотрении поведения идеального газа в различных условиях два набора действующих величин (два *формализма*): $\{p, x, T | s\}_{\text{лаб}}$ и $\{p, x, T | s\}_{\text{тд}}$. Лабораторный набор $\{p_{\text{лаб}}, x_{\text{лаб}}, T_{\text{лаб}}\}$ «привязан» к лабораторной системе координат $\{h=0\}$, а термодинамический набор величин $\{p_{\text{тд}}, x_{\text{тд}}, T_{\text{тд}}\}$ «операбельно инвариантен» по сдвигу для $\{h=0\}$. Скоро выяснится окончательно, что поставленная задача «плавно переходит» в задачу установления необходимой в данном случае связи между этими наборами.

Уравнение Менделеева-Клапейрона согласно способу его введения в рассмотрение – инструмент неинвариантный, а потому оно непригодно для определения $T_{\text{тд}}$ в данном случае. И поэтому оно из аксиоматики изымается, а взамен него по «праву допустимого произвола» [1, §2, п.8] **принимается принцип равномерного распределения:**

$$e_{\text{кин}} = (f/2) \cdot kT_{\text{тд}}. \quad (1)$$

Данная замена проводится при условии договорного согласования эмпирической и термодинамической температурных шкал:

$$[T_{\text{лаб}} = T_{\text{тд}}] T. \quad (2)$$

Такое определение $T_{\text{тд}}$ в данном случае носит абсолютный характер, т.е. понимается как определение инвариантной величины (в данном

случае акт (1)–(2) является по своей сути «рождением» фундаментальной постоянной). Такую возможность предоставляет независимость единицы измерения температуры от других единиц СИ. Отметим, что этот подход принципиально отличается от вероятностного способа введения неинвариантной величины так называемой «статистической температуры» [4, §3].

Для того чтобы обойти необходимость определения параметра s в уравнении (§4, 3), выразим в математической форме требование ковариантного сохранения формы уравнения состояния идеального газа. Последнее было введено в употребление как обобщение эмпирических газовых законов, полученных еще на «доэнтропийной» стадии развития термодинамики.

Объединим в систему два уравнения типа Менделеева–Клапейрона в интенсивных величинах, как лабораторных, так и термодинамических. Для некоторого высотного уровня $h=h_1$ в общем виде имеем

$$\begin{cases} p_{\text{лаб}} \cdot v_{\text{лаб}} = k \cdot T_{\text{лаб}}, \\ p_{\text{тд}} \cdot v_{\text{тд}} = k \cdot T_{\text{тд}}. \end{cases} \quad (3)$$

Отмеченное выше требование выразится в условии совместности системы (3). Здесь значения параметров $p_{\text{лаб}}$ и T [учтено (2)] по условию основной задачи считаются заданными: $p_{\text{лаб}} = p_1$, $T = T_1$ [1, §1]. Следовательно это система двух уравнений с тремя неизвестными: $x_{\text{лаб}}, p_{\text{тд}}, x_{\text{тд}}$.

Полученная в §5 связь (4) между параметрами $p_{\text{тд}}$ и $p_{\text{лаб}}$ делает систему (3) совместной. Обозначим

$$x_{\text{лаб}} = x_{\text{ст}}, \quad x_{\text{тд}} = x.$$

Тогда условие совместности системы (3) выступит в таком виде:

$$x(h) = x_{\text{ст}}(h) / [1 + (2/f) \theta (mgh / kT)].$$

Тем самым формальное решение основной задачи предстанет в следующем виде:

$$n(h) = n_{\text{ст}}(h) \times \left[1 + \frac{mgh}{(f/2) \cdot kT} \right] \quad (4)$$

где $n = x^{-1}$, $n_{\text{ст}} = x_{\text{ст}}^{-1}$ – «стандартное» значение молекулярной плотности, которое было получе-

но традиционным способом [1, §1; 5-6].

§7. О корректности полученного решения основной задачи

Совпадение результатов двух независимых решений одной и той же задачи служит достаточным подтверждением их корректности. Решение основной задачи с помощью задачи II приведено в работе [4, §3], где полученный результат совпадает с полученным выражением (§6, 4), но только с точностью как по типу газовой модели (там совершенный газ и $f=3$), так и до обозначений. Тогда вопрос о корректности формального решения может иметь положительной ответ, если показать независимость методов получения результата (4) §6 и результата работы [4, §3].

Применяемый метод решения основной задачи («метод анализа обратной задачи») является общим для обоих случаев. Но как сами анализируемые обратные задачи, так и способы их рассмотрения разнятся принципиально. В первом случае – это задача I и термодинамический способ рассмотрения. Во втором – это задача II и статистическое рассмотрение. А потому в этом пункте независимость двух решений соблюдена.

Более серьезное возражение признание независимости двух решений встречает со стороны того, что в обоих случаях используется факт: « $e_{\text{кин}} = (f/2) \cdot kT$ ». Приведенное выражение является математической формой двух независимых друг от друга и, конечно, различных высказываний – принципа равномерного распределения в первом случае и теоремы равномерного распределения во втором. На этом вопрос о корректности полученного решения основной задачи будем считать решенным положительно.

§8. Некоторые результаты

Используя стандарт [5], получим следующую таблицу оценочных значений для величин относительных поправок $b = n/n_{\text{ст}}$, $b_1 = n_s/n_{\text{ст}}$, $b_2 = n_{\text{ph}}/n_{\text{ст}}$. Здесь n – значение величины плотности молекул согласно полученному решению (§6, 4) для двухатомного идеального газа, n_s – то же

h, км	10	20	25	30	40	50	60	70	80
a	1,6	2,2	2,5	2,8	3,2	3,5	4,3	5,4	6,5
a_1	2,0	3,1	3,6	4,0	4,6	5,2	6,5	8,2	10
a_2	2,5	4,1	4,9	5,5	6,5	7,3	9,3	12	15

самое, но полученное в [4, §3] для совершенного газа, n_{ph} – то же самое, но в [4, §2], $n_{\text{ст}}$ – стандартное значение, взятое из [5]. Приведем также явный вид этих поправок: 1) $a(h) = [1 + 0,4 \cdot \text{Ч} \cdot mgh / k \cdot T_{\text{ст}}(h)]$; 2) $a_1(h) = [1 + (2/3) \cdot \text{Ч} \cdot mgh / k \cdot T_{\text{ст}}(h)]$; 3) $a_2(h) = [1 + mgh / k \cdot T_{\text{ст}}(h)]$; $T_{\text{ст}}(h)$ взято из [5].

Поправка a носит более щадящий характер по отношению к стандарту, нежели поправки a_1 , или особенно a_2 , но и ее вполне достаточно, чтобы произвести впечатление на специалистов. Далее затронем только два момента.

1. Высотный интервал 25–30 км соответствует максимуму распределения плотности атмосферного озона [6]. Ему же соответствует интервальная оценка: $a \sim (2,5-2,8)$. Так как количественная связь между модельной плотностью молекул воздуха и оценкой плотности молекул озона прямая, то и вывод следует прямой: согласно проведенной здесь коррекции в земной атмосфере озона в 2–3 раза больше, чем это предполагалось ранее.

2. Как это было показано на конкретном материале в работе [7], учет поправки b_2 при интерпретации лидарных данных приводит к примерно двукратному увеличению его рабочего диапазона. Поправка a в среднем примерно вдвое меньше поправки a_2 по характерному лидарному интервалу (15–40 км). Так как влияние модельной плотности на результат интерпретации имеет логарифмический характер, то можно оценить влияние поправки a не как двукратное, а как примерно полуторное увеличение рабочего диапазона лидара АФИ против его стандартного аналога. Это обстоятельство все равно свидетельствует только в пользу правоты полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ярмухамедов Е.Г. Плотность молекул в средней атмосфере. Ч. 1 // Вестн. КазНПУ. Сер. физ.-мат. наук. 2006. №2 (13). С. 223 – 228.
2. Зубарев Д.Н. Неравновесная термодинамика. М.: Наука, 1971. 415 с.
3. Квасников И.А. Термодинамика и статистическая физика. Теория равновесных систем. М.: МГУ, 1991. 800 с.
4. Ярмухамедов Е. Г. К вопросу об определении плотности числа молекул для диапазона 0 – 80 км. Алматы: КазНИИТИ, 1991. №3255. 16 с. // Межвузовский сборник науч. тр. Алматы: КазАТК, 2002. Вып.10. С. 110-117.
5. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. М.: ГК

СССР по стандартам, 1981. 180 с.

6. Атмосфера: Справочник (данные, модели). Л.: Гидромет, 1991. 512 с.

7. Ярмухамедов Е.Г. Учет фактора неравновесности при интерпретации результатов ЛЗА. Алма-Ата: КазНИИИТИ, 1991. №3411. 24 с. Межвузовский сбор. науч. тр. Алматы: КазАТК, 2002. Вып. 10. С. 117-121.

Резюме

Ұсынылып отырған зерттеудің II бөлімінде Негізгі міндеттің шешімі келтіріледі және келесі сұрақтар қаралады: 1) қалпына келу әдісі; 2) «қысым» параметрін қараудың енгізу тәсілдері; 3) Негізгі міндеттің формалдық шешімі; 4) шешу тәсілін талдау; 5) алынған шешімнің дұрыстығын тал-

дау; 6) шешімді бағалау; 7) алынған шешімді қабылдаудың жердің озондық қабатын бағалауына (а) және лидардың жұмыс ауқымына (б) ықпалы. *YarMohamed'ov E. G. "Molecular Density In the Middle Atmosphere"*.

Summary

The decision Principal problem of atmospheric molecular density is brought out Part II. The next questions are discussed here: 1) the general method of restoration; 2) the method of introduction parameter "pressure"; 3) the formal decision of the Principal problem; 4) the analysis this decision; 5) the estimate density atmospheric ozone; 6) the increase of the dynamic lidar range.

Астрофизический институт

им. Ф.Г. Фесенкова МОН РК

Поступила 17.04. 2006 г.