

ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ГАЗЕ МЕТОДОМ ЧАСТИЦ-В-ЯЧЕЙКАХ

На основе численного решения тестовой задачи о взрыве разностным методом на лагранжевой сетке и методом частиц-в-ячейках исследуется возможность настройки параметров дискретизации второго метода для его использования при изучении адиабатических процессов.

И в астрофизических исследованиях, и в изучении обтекания космических аппаратов газом и плазмой часто приходится иметь дело с расчетами движения сплошной среды с большими деформациями и неоднородного состава. Подходящим инструментом для решения таких задач является семейство методов частиц-в-ячейках [1]. Наряду с преимуществами, которые позволяют эффективно рассчитывать процессы на границах раздела двух сред, динамику ударных волн и контактных разрывов, эти методы обладают и рядом недостатков. Успех в решении конкретной задачи во многом зависит от того, насколько уменьшено влияние этих недостатков на вид полученного численного решения. К сожалению, ввиду сложности методов частиц и многообразия возникающих погрешностей пока еще не разработаны универсальные методы для их анализа. Поэтому при конструировании алгоритмов численного решения конкретных задач важное значение имеют тестовые расчеты, по результатам которых можно оценить суммарную погрешность метода и настроить оптимальным образом параметры численной схемы. В статье речь пойдет о настройке аппроксимационной вязкости, играющей двойную роль в получении численного решения.

Прежде формулировки нашей задачи опишем кратко основную идею методов частиц. Суть этих методов заключается в представлении оператора эволюционной задачи в виде суммы двух операторов, один из которых дивергентный. Запишем исходную задачу в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = 0. \quad (1)$$

Соответственно явная схема разностной задачи записывается в следующем виде:

$$\varphi^{i+1} = (E - A_h \tau) \varphi^i \quad (2)$$

Представим $A_h = B + D$, тогда, с точностью $O(\tau^2)$ можно записать, что

$$\varphi^{i+1} = (E - B\tau)(E - D\tau)\varphi^i, \quad (3)$$

или

$$\begin{cases} \varphi^{i+1/2} = (E - B\tau)\varphi^i, \\ \varphi^{i+1} = (E - D\tau)\varphi^{i+1/2}. \end{cases} \quad (4)$$

т.е. в дифференциальной форме

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + B\varphi_1 = 0, & \varphi_1(t_i) & \varphi_2(t_i) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + D\varphi_2 = 0, & \varphi_2(t_i) & \varphi_1(t_i + \tau). \end{cases} \quad (5)$$

Расщепленная задача (5) решается в два этапа. Недивергентная часть решается с помощью одного из разностных методов на эйлеровой сетке. Часть задачи с дивергентным оператором представляется в виде

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial (U \varphi_2)}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

что позволяет на этом этапе использовать подход в духе проекционно-разностных методов Галлеркина. А именно решение ϕ_2 представляется в виде

$$\varphi_2(t, x) = \sum_{s=1}^N \Phi_s R(x, x_s(t)), \quad (7)$$

где нормированные функции разложения R называются ядрами частиц. При неизменной форме ядра меняется его положение, определяемое параметром $x_s(t)$. Используя свойство дивергентности оператора, можно получить систему динамических уравнений для определения этого параметра:

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = U(x_s(t)), \quad (8)$$

Таким образом, решение задачи на втором этапе сводится к решению уравнений движения модельных «частиц» (8). Каждый из этапов заканчивается интерполяцией значений физических величин в узлы эйлеровой сетки или в центры частиц. Физический смысл методов частиц-в-ячейках применительно к газовой динамике состоит в том, что по отдельности рассматриваются два процесса изменения импульса и энергии ячейки. Первый процесс связан с действием сил давления и совершением ими работы, второй – с переносом этих физических величин через границы ячейки. В классическом методе частиц-в-ячейках, предложенным Харлоу [2], в качестве ядер частиц берутся δ -функции. Такой выбор ядра приводит к заметным флуктуациям плотности. Кроме того, в этом случае решение очень чувствительно к начальному мелкомасштабному распределению частиц. Впоследствии были разработаны процедуры построения ядер частиц, сглаживающих интерполяцию. Достигается это тем, что каждая частица одновременно дает вклад в несколько узлов эйлеровой сетки. К сожалению, в этом случае композиция прямой и обратной интерполяции приводит к схемной вяз-

кости, родственной при интерпретации второго этапа метода частиц как асимптотически однородной разностной схемы аппроксимационной вязкости. Сравнительно недавно Брэкбиллом с сотр. [3] был предложен бездиссипативный метод частиц-в-ячейках – FLIP-метод. Ими построена такая схема расчета, при которой лагранжевыми признаками частиц (величинами, не меняющимися вдоль траектории движения) являются импульс и энергия, а не только масса. Однако FLIP-метод требует больших затрат на производство вычислений, так, что его использование оправданно для детализации решений, полученных более дешевыми методами. Самыми быстрыми методами частиц являются методы, использующие на первом этапе явные разностные схемы. При этом неустойчивость этих схем компенсируется устойчивостью схемы второго этапа. В этом случае вязкость играет положительную роль, сглаживая решение и не давая развиться счетной неустойчивости. Однако, если $u\tau$ (u – характерная скорость, τ – шаг по времени) намного меньше шага пространственной дискретизации, то схемная вязкость и теплопроводность могут существенным образом исказить расчеты динамики идеального газа. Можно ли подобрать такие значения шагов дискретизации, что нестационарное решение с достаточно широкой областью значений на заданном интервале не искажалось бы схемной диссипативностью? В качестве тестовой задачи мы выбрали задачу о взрыве со сферически-симметричным начальным температурным профилем. На рис. 1 изображены начальные профили (сверху вниз) температуры, плотности, скорости и давления.

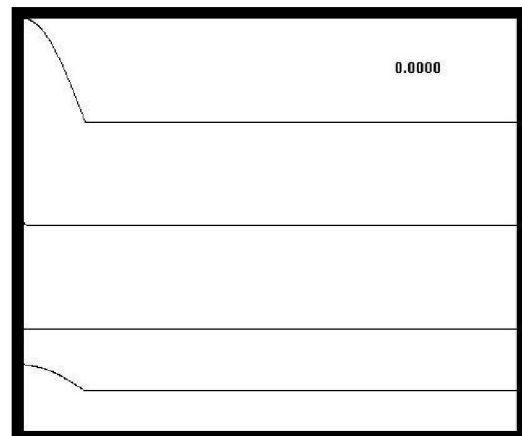


Рис.1. Начальные условия тестовой задачи

Расчеты проводились двумя методами: методом частиц-в-ячейках и разностным бездиссипативным методом на лагранжевой сетке. Нашей целью было сравнение основных характеристик нестационарного решения – скорости звуковой волны, формирования ударной волны в результате ее укручения, геометрических и физических параметров образующейся центральной горячей и разреженной областей, полученного двумя способами. В качестве разностной схемы первого этапа выбиралась следующая явная схема:

$$\begin{cases} v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\tau}{h} \frac{P_{i+1}^n - P_{i-1}^n}{2\rho_i^n}, \\ \varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n - \frac{\tau}{h} P_i^n \frac{(\vartheta_i^n + \vartheta_{i+1}^n)r_i^2 - (\vartheta_i^n + \vartheta_{i-1}^n)r_{i-1}^2}{\rho_i^n r_{i-1/2}^2}, \end{cases} \quad (9)$$

где v – скорость; ρ – плотность; ε – внутренняя энергия; $P = \frac{2}{3} \rho \varepsilon$ – давление; $r_i = h \times i$, $\vartheta_i^n = \frac{v_i^{n+1} + v_i^n}{2}$.

Ядро частицы с центром в x_p задавалось выражением (PIC-модель)

$$R(x - x_p) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & |x - x_p| \leq h/2, \\ 0, & |x - x_p| > h/2. \end{cases} \quad (10)$$

Для второго метода использовалась следующая проекция уравнений гидродинамики на лагранжеву сетку:

$$\begin{cases} \frac{dv_j}{dt} = -\frac{2}{\rho_{j+1/2}} \frac{P_{j+1} - P_j}{r_{j+1} - r_{j-1}}, \\ \frac{d\rho_j}{dt} = -\rho_j \frac{4}{(r_j + r_{j-1})^2} \frac{v_j r_j^2 - v_{j-1} r_{j-1}^2}{r_j - r_{j-1}}, \\ \frac{dP}{dt} = -\frac{5}{3} P_j \frac{4}{(r_j + r_{j-1})^2} \frac{v_j r_j^2 - v_{j-1} r_{j-1}^2}{r_j - r_{j-1}}, \end{cases} \quad (11)$$

где $\rho_{j+1/2} = \rho_j + \frac{\rho_{j-1} - \rho_j}{r_{j+1} - r_{j-1}} (r_j - r_{j-1})$. Результа-

ты расчетов показали, что при выборе параметров дискретизации в методе частиц в ячейках, соответствующих границе устойчивости полной схемы, решения, полученные обоими методами, совпадают не только по перечисленным выше характеристикам, но и в деталях.

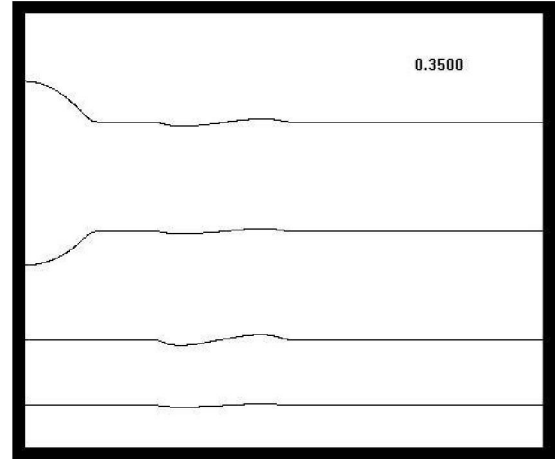


Рис.2. Кадр, представляющий решение тестовой задачи в момент времени $t=0,35$ (скорость звука равна $5/3$ и радиус границы равен единице)

Полученный результат (рис. 2) дает основание предполагать, что экономичный метод частиц в ячейках при соответствующей настройке параметров дискретизации можно использовать и для описания адиабатических процессов в многомерных задачах.

Работа выполнена в рамках ПФИ, шифр Ф-0351.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев Ю.Н., Вишков В.А., Федорук М.П. Численное моделирование методами частиц-в-ячейках. Новосибирск, 2004. 359с.
2. Харлоу Ф.Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики. // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967.
3. Brackbill J.U., Kothe D.B., Ruppel H.M. FLIP: A low-dissipation, particle-in-cell method for fluid flow // Comput. Phys. Comm. 1998. V. 48. P. 25–38.

Резюме

Жарылыс туралы тестілік есептің сандық шешімінің негізінде Лагранж сеткесіндегі айырымдық әдіспен және ұяшықтардағы бөлшектер әдісімен, екінші әдісті пайдалану үшін оның дискретизациясының параметрлерін баптаудың мүмкіндігі зерттеледі.

Summary

Tuning of the scheme parameters in the particle-in-cells method is investigated to use it for adiabatic processes study. Investigations were carried out on the basis of a test task solving by the PIC method and the dissipationless lagrangian one.

Астрофизический институт
им. В.Г. Фесенкова МОН РК,
г. Алматы

Поступила 19.04.2006 г.

СССР по стандартам, 1981. 180 с.

6. Атмосфера: Справочник (данные, модели). Л.: Гидромет, 1991. 512 с.

7. Ярмухамедов Е.Г. Учет фактора неравновесности при интерпретации результатов ЛЗА. Алма-Ата: КазНИИИТИ, 1991. №3411. 24 с. Межвузовский сбор. науч. тр. Алматы: КазАТК, 2002. Вып. 10. С. 117-121.

Резюме

Ұсынылып отырған зерттеудің II бөлімінде Негізгі міндеттің шешімі келтіріледі және келесі сұрақтар қаралады: 1) қалпына келу әдісі; 2) «қысым» параметрін қараудың енгізу тәсілдері; 3) Негізгі міндеттің формалдық шешімі; 4) шешу тәсілін талдау; 5) алынған шешімнің дұрыстығын тал-

дау; 6) шешімді бағалау; 7) алынған шешімді қабылдаудың жердің озондық қабатын бағалауына (а) және лидардың жұмыс ауқымына (б) ықпалы. *YarMohamed'ov E. G. "Molecular Density In the Middle Atmosphere"*.

Summary

The decision Principal problem of atmospheric molecular density is brought out Part II. The next questions are discussed here: 1) the general method of restoration; 2) the method of introduction parameter "pressure"; 3) the formal decision of the Principal problem; 4) the analysis this decision; 5) the estimate density atmospheric ozone; 6) the increase of the dynamic lidar range.

Астрофизический институт

им. Ф.Г. Фесенкова МОН РК

Поступила 17.04. 2006 г.