УДК 521.1

М. ДЖ. МИНГЛИБАЕВ

К ВРАЩАТЕЛЬНОМУ ДВИЖЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЛА

Получены уравнения вращательного движения нестационарного тела вокруг собственного центра масс в аналогах переменных Белецкого–Черноусько.

Рассмотрим вращательное движение нестационарного тела вокруг собственного центра масс. Предположим, что нестационарность тела T характеризуется переменной массой $m = m(t)$ и переменным, характерным линейным размером $R = R(t)$ [1,2] и, следовательно, моменты инерции второго порядка являются переменными

$$A = A(t),\ B = B(t),\ C = C(t). \qquad (1)$$

Пусть выполняются условия

$$\frac{A(t)}{A(t_0)} = \frac{B(t)}{B(t_0)} = \frac{C(t)}{C(t_0)} = \chi(t), \qquad (2)$$

где $\chi(t)$ – произвольные функция времени. Условие (2) означает, что изменение массы и размеров тела происходит гомотетично, форма тела остается постоянной (лучистое расширение или сжатие), при этом ориентация осей инерции в теле T остается неизменной [3].

Введем невращающуюся систему координат $O\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс O тела T (орбитальная «перигейная» система координат). Система вместе с телом T движется поступательно по орбите. Будем считать, что ось $O\eta$ коллинеарна нормали $\vec{N}$ к плоскости орбиты, ось $O\zeta$ коллинеарна направлению $\vec{r}_П$ радиус-вектора орбиты в ее «перигее» (направлением от которого считается истинная аномалия квазиэллиптической орбиты), ось $O\xi$ коллинеарна направлению $\vec{V}_П$ вектора скорости в «перигее» орбиты.

Вращательное движение нестационарного тела T вокруг собственного барицентра O опишем аналогами переменных Белецкого–Черноусько [4]:

$$L^*,\ \rho^*,\ \sigma^*,\ \theta,\ \varphi,\ \psi, \qquad (3)$$

где $L^* = \| \vec{L}^* \|$ – модуль вектора кинетического момента $\vec{L}^*$ тела T относительно собственного центра масс O в системе координат $O\xi\eta\zeta$. За невозмущенное вращательное движение примем свободное вращательное движение тела T постоянной формы, переменных размеров и массы по инерции при условии (2) – аналога движения Эйлера–Пуансо твердого тела [4]. Покажем, что при этих допущениях формы уравнений Белецкого–Черноусько сохраняются, но правые части этих уравнений будут зависеть явно от времени согласно (1).

В невозмущенном вращательном движении тела T вектор кинетического момента $\vec{L}^*$ постоянен по величине и направлению. Положение вектора $\vec{L}^*$ в системе координат $O\xi\eta\zeta$ будем определять двумя углами – ρ^* и σ^*.

Построим еще одну систему координат – $OL_1^*L_2^*L^*$, связанную с вектором $\vec{L}^*$. Ось OL^* направим вдоль вектора $\vec{L}^*$. В плоскости $O\eta L^*$ проведем ось OL_1^*, перпендикулярную к вектору $\vec{L}^*$ и составляющую тупой угол с осью $O\eta$. Далее построим ось OL_2^*, которая дополняет оси OL_1^*, OL^* до правой системы координат.

Через $O\xi'\eta'\zeta'$ обозначим барицентрическую систему координат, оси которой направлены вдоль оси инерции тела и жестко связаны с телом. Взаимное положение систем координат $O\xi'\eta'\zeta'$ и $OL_1^*L_2^*L^*$ определим углами Эйлера θ, φ, ψ. В невозмущенном движении эти углы, меняясь со временем, описывают аналог движения Эйлера–Пуансо нестационарного тела T при условии (2). Дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов (3) будут описывать возмущенное вращательное движение тела T.

Взаимное расположение трех введенных систем координат задается двумя матрицами направляющих косинусов:

$$\begin{array}{cccc} & L_1^* & L_2^* & L^* \\ \xi & & & \\ \eta & & & \\ \zeta & & & \end{array}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}\begin{array}{c} L_1^* \\ L_2^* \\ L^* \end{array}\begin{array}{ccc} \xi' & \eta' & \zeta' \\ & & \\ & & \\ & & \end{array}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Элементы первой матрицы (4) имеют вид

$$l_1 = \cos\rho^* \sin\sigma^*, \quad l_2 = \cos\sigma^*, \quad l_3 = \sin\rho^* \sin\sigma^*,$$
$$n_1 = -\sin\sigma^*, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \cos\rho^*, \quad (5)$$
$$k_1 = \cos\rho^* \cos\sigma^*, \quad k_2 = -\sin\sigma^*, \quad k_3 = \sin\rho^* \cos\sigma^*.$$

Выражения для элементов второй матрицы известны:

$$\alpha_{11} = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta,$$
$$\alpha_{12} = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta,$$
$$\alpha_{13} = \sin\theta\sin\psi,$$
$$\alpha_{21} = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta'$$
$$\alpha_{22} = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta, \quad (6)$$
$$\alpha_{23} = -\sin\theta\cos\psi,$$
$$\alpha_{31} = \sin\theta\sin\varphi,$$
$$\alpha_{32} = \sin\theta\cos\varphi,$$
$$\alpha_{33} = \cos\theta.$$

Для вывода возмущенного вращательного движения в оскулирующих элементах (3) воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}, \quad (7)$$

где $\vec{M}$ – момент возмущающих сил. Проекции вектора $\vec{L}^*$ на оси $\xi\eta\zeta$ равны

$$L_\xi^* = L^* \sin\rho^* \sin\sigma^*, \quad L_\eta^* = L^* \cos\rho^*,$$
$$L_\zeta^* = L^* \sin\rho^* \cos\sigma^*. \quad (8)$$

Уравнение (7) в проекциях на оси $\xi\eta\zeta$ имеет вид

$$\frac{dL_\xi^*}{dt} = M_\xi, \quad \frac{dL_\eta^*}{dt} = M_\eta, \quad \frac{dL_\zeta^*}{dt} = M_\zeta. \quad (9)$$

Подставив выражения (8) в уравнения (9), получим

$$\dot{L}^* \sin\rho^* \sin\sigma^* + L^*\dot{\rho}^* \cos\rho^* \sin\sigma^* +$$
$$+ L^*\dot{\sigma}^* \sin\rho^* \cos\sigma^* = M_\xi,$$
$$\dot{L}^* \cos\rho^* - L^*\dot{\rho}^* \sin\rho^* = M_\eta, \quad (10)$$
$$\dot{L}^* \sin\rho^* \cos\sigma^* + L^*\dot{\rho}^* \cos\rho^* \cos\sigma^* -$$
$$- L^*\dot{\sigma}^* \sin\rho^* \sin\sigma^* = M_\zeta.$$

Отсюда найдем

$$\dot{L}^* = M_\xi \sin\rho^* \sin\sigma^* + M_\eta \cos\rho^* +$$
$$+ M_\zeta \sin\rho^* \cos\sigma^* = M,$$
$$L^*\dot{\rho}^* = M_\xi \sin\sigma^* \cos\rho^* - M_\eta \sin\rho^* +$$
$$+ M_\zeta \cos\sigma^* \cos\rho^* = M_1, \quad (11)$$
$$\dot{\sigma}^* L^* \sin\rho^* = M_\xi \cos\sigma^* - M_\zeta \sin\sigma^* = M_2,$$

где M, M_1, M_2 – проекции момента $\vec{M}$ соответственно на оси L^*, L_1^*, L_2^* в системе координат $OL_1^*L_2^*L^*$.

Далее, с учетом того, что p, q, r есть проекции абсолютной угловой скорости тела T на главные центральные оси инерции в системе координат $O\xi'\eta'\zeta'$, запишем

$$p = \frac{Ap}{A} = \frac{L_{\xi'}^*}{A} = \frac{L^*\alpha_{31}}{A},$$
$$q = \frac{Bq}{B} = \frac{L_{\eta'}^*}{B} = \frac{L^*\alpha_{32}}{B}, \quad (12)$$
$$r = \frac{Cr}{C} = \frac{L_{\zeta'}^*}{C} = \frac{L^*\alpha_{32}}{C},$$

где α_{31}, α_{32}, α_{33} задаются согласно формулам (6).

С другой стороны, величины p, q, r как проекции абсолютной скорости на оси ξ', η', ζ'

согласно введенным трем системам координат, взаимное расположение которых определяются матрицами направленных косинусов (4), запишем в виде

$$p = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\alpha_{31} + \rho^*\alpha_{21} +$$

$$+ \dot{\sigma}^*\left[\alpha_{11}\left(-\sin\rho^*\right) + \alpha_{31}\cos\rho^*\right],$$

$$q = -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\alpha_{32} + \rho^*\alpha_{22} +$$

$$+ \dot{\sigma}^*\left[\alpha_{12}\left(-\sin\rho^*\right) + \alpha_{32}\cos\rho^*\right], \qquad (13)$$

$$r = \dot{\varphi} + \psi\alpha_{33} + \rho^*\alpha_{23} +$$

$$+ \dot{\sigma}^*\left[\alpha_{13}\left(-\sin\rho^*\right) + \alpha_{33}\cos\rho^*\right].$$

Приравнивая правые части уравнений (12) и (13), разрешая полученные соотношения относительно $\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$, упрощая и учитывая уравнения (11), получим

$$\dot{\theta} = L^*\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi +$$

$$+ \frac{1}{L^*}\left(M_2\cos\psi - M_1\sin\psi\right),$$

$$\dot{\psi} = L^*\left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right) - \frac{M_1}{L^*}\cos\psi \times$$

$$\times ctg\theta - \frac{M_2}{L^*}\left(ctg\rho + \sin\psi \cdot ctg\theta\right), \qquad (14)$$

$$\dot{\varphi} = L^*\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2\varphi}{A} - \frac{\cos^2\varphi}{B}\right)\cos\theta +$$

$$+ \frac{M_1\cos\psi + M_2\sin\psi}{L^*\sin\theta}.$$

Система уравнений (11) и (14) описывает возмущенное движение относительно шести переменных (3). Они являются аналогами уравнений Белецкого–Черноусько для рассматриваемой нестационарной задачи при условии (2).

Невозмущенное вращательное движение – аналог уравнения Уиттекера. Пусть в уравнениях (11) и (14) возмущающий момент равен нулю. Тогда имеем

$$L^* = L_0^* = const, \qquad \rho^* = \rho_0^* = const,$$

$$\sigma^* = \sigma_0^* = const, \qquad (15)$$

$$\dot{\theta} = L^*\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\dot{\psi} = L^*\left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right), \qquad (16)$$

$$\dot{\varphi} = L^*\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2\varphi}{A} - \frac{\cos^2\varphi}{B}\right)\cos\theta.$$

Система уравнений (16), которые являются аналогами уравнений Уиттекера [4] в нашей рассматриваемой задаче при условии (2), легко интегрируется и дает свободное движение нестационарного тела T по инерции.

Здесь отметим, что система уравнений (16) также интегрируется, если моменты инерции (1) удовлетворяют условию

$$A(t) = B(t) \neq C(t), \qquad (17)$$

те. нестационарное тело T *предполагается* осесимметричным. При условии (17) также предполагается неизменность ориентации осей инерции в теле T. Однако в случае (17) в отличие от случая (2) коэффициент сжатия (вытянутости) тела T является переменной величиной, т.е. форма тела меняется. Полученные уравнения возмущенного движения (11), (14) и в случае (17) сохраняют свою силу. При условии (17) из (16) следует

$$\theta = \theta_0 = const, \qquad (18)$$

$$\dot{\psi} = L_0^* A(t), \qquad (19)$$

$$\dot{\varphi} = L_0^*\cos\theta_0\frac{A(t) - C(t)}{A(t)\cdot C(t)}, \qquad (20)$$

где $A(t)$ и $C(t)$ предполагаются заданными известными функциями времени.

Уравнения (11), (14) носят общий характер. В частном, но важном случае, когда моменты действующих сил обладают силовой функцией, эти уравнения могут быть преобразованы к более удобному виду.

Момент внешних сил дается формулой

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^{3}\vec{e}_k \times grad_{\vec{e}_k}U, \qquad (21)$$

где $\vec{e}_k\ (k = 1,2,3)$ – единичные векторы по направлениям соответственно осей $O\xi'\eta'\zeta'$; U –

силовая функция. Используя соотношения (21), преобразуя правые части уравнения (11) и (14), аналогично тому, как это выполнено в соответствующей стационарной задаче [4], получаем

$$\dot{L} = \frac{\partial U}{\partial \psi},$$

$$L^* \dot{\rho}^* \sin \rho^* = -\frac{\partial U}{\partial \sigma^*} + \cos \rho^* \frac{\partial U}{\partial \psi},$$

$$L^* \dot{\sigma}^* \sin \rho^* = \frac{\partial U}{\partial \rho},$$

$$L^* \dot{\theta} \sin \theta = L^{*2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi -$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \cos\theta \frac{\partial U}{\partial \psi}, \qquad (22)$$

$$L^* \dot{\varphi} \sin \theta = L^{*2}\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2\varphi}{A} -\right.$$

$$\left. - \frac{\cos^2\varphi}{B}\right)\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial U}{\partial \theta},$$

$$\dot{\psi} = L^*\left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right) -$$

$$-\frac{1}{L^*}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho^*} ctg\,\rho^* + \frac{\partial U}{\partial \theta} ctg\,\theta\right).$$

В случае *осесимметричного тела в силу* условий (17) система уравнений (22) упростится и имеет следующий вид:

$$\dot{L} = \frac{\partial U}{\partial \psi},$$

$$L^* \dot{\rho}^* \sin \rho^* = -\frac{\partial U}{\partial \sigma^*} + \cos \rho^* \frac{\partial U}{\partial \psi},$$

$$L^* \dot{\sigma}^* \sin \rho^* = \frac{\partial U}{\partial \rho},$$

$$L^* \dot{\theta} \sin \theta = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \cos\theta \frac{\partial U}{\partial \psi}, \qquad (23)$$

$$L^* \dot{\varphi} \sin \theta = L^{*2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial U}{\partial \theta},$$

$$\dot{\psi} = \frac{L^*}{A} - \frac{1}{L^*}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho^*} ctg\,\rho^* + \frac{\partial U}{\partial \theta} ctg\,\theta\right).$$

Полученные уравнения вращательного движения нестационарного тела вокруг центра масс (11), (14) и (22), (23) будут использованы для исследования поступательно вращательного движения систем гравитирующих нестационарных тел.

Работа выполнена в рамках ПФИ, шифр Ф-0351.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Omarov Tuken*. B. (Editor) Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy // Nova Science Publishers Inc. New-York, 2002. P. 260.

2. *Bekov A.A., Omarov T.B.* The Theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems // Astron. Astrophys. Trans. 2003. V. 22, N2. P.145-153.

3. *Минглибаев М.Дж.* Задача о поступательно-вращательном движении *N* взаимогравитирующих тел постоянной формы, переменных размеров и массы // Проблемы динамики звездных систем. Алматы: ғылым, 1992. С. 78–89. (Труды АФИ АН РК; т. 50).

4. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ. 1975. 308 с.

Резюме

Белецкий – Черноусько айнымалыларына ұқсас айнымалыларда стационар емес дененің айналмалы қозғылысы жөніндегі мәселенің теңдеулері қорытып шығарылған.

Summary

The equations of rotational motions of the non-stationary body around own centre of mass in analogues of Beletskii-Tchernousko variables are obtained.

Астрофизический институт им. В.Г.Фесенкова МОН РК, г. Алматы

Поступила 17.04.2006 г.

Резюме

Күн құрылысының жаңа моделі ұсынылған. Ол тез айналатын нейтрондық ядродан, беткі қабатқа жылу жеткізетін сутекті конвективті зонадан және тығыздалған беттен тұрады. Бұл модель бойынша стандартты күн моделінен (СКМ) сутегі арқылы дейтерийдің түзілу реакциясы алынып тасталған. Көміртегі-азотты және темір тобы атомдарының түзілуі ядроға протондардың енуімен және нейтрондардың радиациялық қамтылуымен түсіндіріледі. Күннің беттік тығыздалған моделі 5 және 160 минуттық мерзімдері бар гелиосейсмикалық толқындардың орын алатындығын білдіреді.

Summary

A new model of the Sun structure is suggested. It consists of fast-rotating neutron core, hydrogenous convective zone of heat transfer to the surface and condensed surface. The model excludes from standard solar model (SSM) a reaction of deuterium formation from hydrogen. A formation of atoms of carbonic-nitric and iron groups is explained by processes of proton penetration into nuclei and radiation capture of neutrons. A model of condensed solar surface explains existence of helioseismic waves with periods 5 and 160 minutes.

Институт ионосферы МОН РК,
г. Алматы