УДК 531.1:534

Ш. М. АЙТАЛИЕВ, Л. А. ХАДЖИЕВА

К КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

В отличие от прежних публикаций вычленяется физическая нелинейность. Влияние ее на устойчивость колебаний системы определяется поведением решения уравнения типа Хилла для возмущенного состояния, полученного дискретным представлением интегральной кривой уравнения по методике А. Н. Тюреходжаева. Это дает квазианалитическую оценку процесса, что демонстрируется конкретными примерами.

Исследуются резонансные колебания физически нелинейных систем, ведущие к дестабилизации ее движения и нарушению прочностных характеристик отдельных элементов конструкций. Обеспечение устойчивого движения системы связано с выявлением и исключением из рабочих режимов частот, вызывающих резонансные колебания. Здесь, как и в предыдущих работах [1–3], под устойчивым движением системы понимается ее движение в отсутствии колебательного процесса. При исследовании резонансных режимов колебаний принимаются во внимание диссипативные силы, которые полагаются нелинейно-вязкими в виду ярко выраженных демпфирующих свойств физически нелинейных систем (каучуки и подобные им материалы, служащие в качестве демпферов колебаний).

Согласно [4] физически нелинейной системе, характеризуемой произвольностью угла поворота поперечных элементов, соответствует квадратичная нелинейность восстанавливающей силы. Колебания физически нелинейной системы задаются уравнением

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + k_1 \frac{df}{dt} + k_2 \left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 = F_0 + F_1 \cos\Omega t\,. \qquad (1)$$

Уравнения (1) описывают движение как механической системы с одной степенью свободы, так и движение многомерных упругих систем. Следуя распространенному в механике деформируемого твердого тела приему решения многомерных задач путем разделения переменных, сложные уравнения с бесконечным числом степеней свободы заменяются уравнением типа (1) относительно обобщенных функций перемещений $f(t)$.

Представляя решение (1) в виде его разложения в ряд Фурье по основной и кратным частотам колебаний, мы исследуем резонансные режимы движения системы.

В случае основного резонанса решение (1) задается в виде

$$f(t) = r_0 + r_1 \cos(\Omega t - \varphi_1)\,. \qquad (2)$$

Методом гармонического баланса построены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) основного резонанса:

$$\begin{gathered} r_1^2\left[(-\Omega^2 + \alpha_1 + 2\alpha_2 r_0)^2 + k_1^2\Omega^2\right] = F_1^2; \\ \alpha_1 r_0 + \alpha_2 r_0^2 + 0,5(k_2\Omega^2 + \alpha_2) r_1^2 = F_0, \end{gathered} \qquad (3)$$

(рис. 1–3).

АЧХ носят нелинейный характер и вытянуты влево (рис. 1, 2), что свидетельствует о появлении основного резонанса на более низких частотах, чем для линейного случая (рис. 3).

Усиление физической нелинейности, т.е. мягкости характеристики системы, ведет к понижению величин критических частот (рис. 1, кривая 1). При линеаризации нелинейного вязкого сопротивления

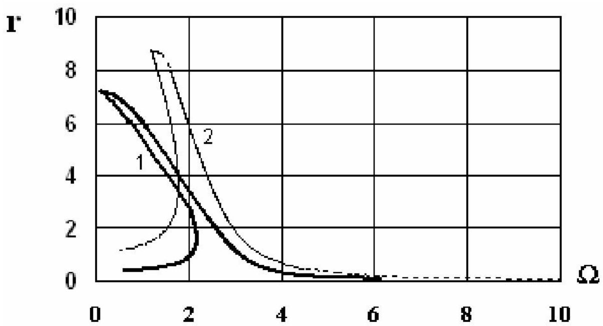


Рис. 1. Резонансные кривые 1 и 2.
1 – при k1=0,2; k2=0,1; α1=1; α2=1; F0=5; F1=10;
2 – при k1=0,2; k2=0,1; α1=1; α2=0,5; F0=5; F1=50

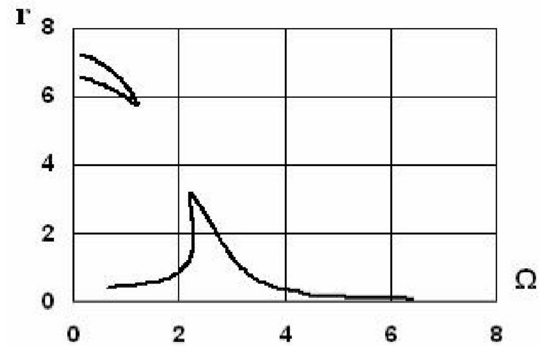
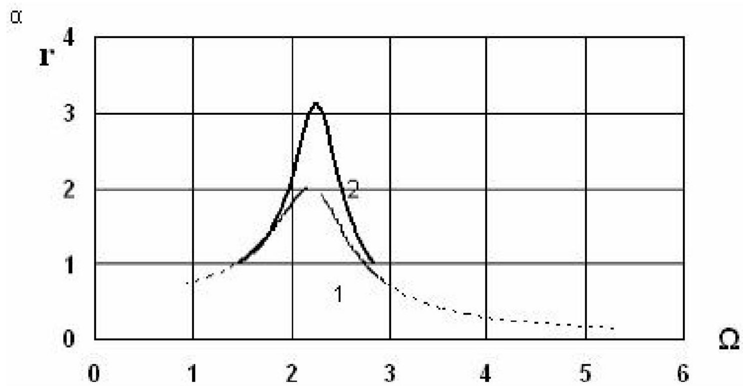


Рис. 2. Влияние внутреннего сопротивления k1 на АЧХ
(k1=0,2; k2=0; α1=5; α2=1; F0=5; F1=10)

Рис. 3. Резонансные для линейного случая:
1 – при k1=0,5; k2=0,2; α1=1; α2=0;
F0=5; F1=10;
2 – при k1=0,2; k2=0; α1=5; α2=0,1;
F0=5; F1=10



(отсутствие его нелинейной части) наблюдаются срывы амплитуд колебаний, причем области неоднозначности режимов колебаний на АЧХ (двойственность значений амплитуд колебаний r на одной частоте W) почти полностью исчезают (рис. 2). Подобные явления могут происходить при медленном изменении частоты возбуждения, когда при каждом ее значении успевает установиться режим стационарных вынужденных колебаний, Режимы же вынужденных колебаний на изолированных участках не могут быть получены при непрерывном изменении частоты W (рис. 2). Для этого требуется достаточно сильное возмущение основного режима движения в виде толчка или удара [5].

Другим упрощением модели является линеаризация ее нелинейной характеристики. С допущением $a_2 = 0$ построены линейные модели основного резонанса (рис. 3, кривая 1). Из анализа поведения АЧХ для двух линеаризованных случаев (рис. 2, 3) следует, что нелинейность колебательного процесса системы в большей степени зависит от нелинейности ее характеристики, чем нелинейно-вязкого сопротивления.

В работах [1–3] исследовалась устойчивость резонансных колебаний нелинейных систем. Принятый критерий устойчивости движения идентичен определению устойчивости по Ляпунову, когда устойчивость периодического решения зависит от поведения малого приращения $d\,f$ во времени, т.е. решения уравнения возмущенного состояния системы. Предложенная методика исследования устойчивости резонансных режимов колебаний заключалась к сведению решения уравнения возмущенного состояния системы к решению параметрического уравнения типа Хилла относительно переменной h:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \eta\left[\theta_0 + \theta_{1s}\sin\Omega t + \theta_{1c}\cos\Omega t + \theta_{2s}\sin 2\Omega t + \theta_{2c}\cos 2\Omega t\right] = 0, \qquad (4)$$

где θ_0, θ_{1s}, θ_{1c}, θ_{2s}, θ_{2c} – функции частот, амплитуд и фаз колебаний W, r, j исследуемых резонансных колебаний системы. Для случая основного резонанса в физически нелинейной системе (1) они задаются как [6]:

$$
\begin{aligned}
\theta_0 &= \alpha_1 + 2\,\alpha_2 r_0 - 0{,}25\,k_1^2 - 0{,}5\,k_2^2 r_1^2 \Omega^2,\\
\theta_{1s} &= (2\,\alpha_2 r_1 + k_2 r_1 \Omega^2)\sin\varphi_1 + k_1 k_2 r_1 \Omega \cos\varphi_1,\\
\theta_{1c} &= (2\,\alpha_2 r_1 + k_2 r_1 \Omega^2)\cos\varphi_1 - k_1 k_2 r_1 \Omega \sin\varphi_1,\\
\theta_{2s} &= 0{,}5\,k_2^2 r_1^2 \Omega^2 \sin 2\varphi_1,\\
\theta_{2c} &= 0{,}5\,k_2^2 r_1^2 \Omega^2 \cos 2\varphi_1 .
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Решение (4) строится на применении теории Флоке и построении характеристического определителя, устанавливающего границы областей неустойчивости рассматриваемых колебаний.

В работах [6, 7] предлагается исследовать вопросы устойчивости колебаний, а именно решение уравнений типа Хилла (4), метода частичной дискретизации, широко применяемого в работах А. Н. Тюреходжаева [8] для изучения колебаний в параметрических системах, задаваемых уравнениями типа Матье или Хилла.

Здесь рассматривается применение метода частичной дискретизации к анализу устойчивости основного резонанса в физически нелинейной системе (1). Задавая частоты колебаний, по характеру поведения df можно судить об устойчивости или неустойчивости колебательного процесса.

Рекуррентная формула дискретного представления по t решения (4), (5) $h(t)$ на k-м шаге разбиения аргумента t при заданных начальных условиях:

$$\eta(0) = \eta_0; \quad \eta(0) = \eta_0 \tag{6}$$

имеет вид [6, 7]:

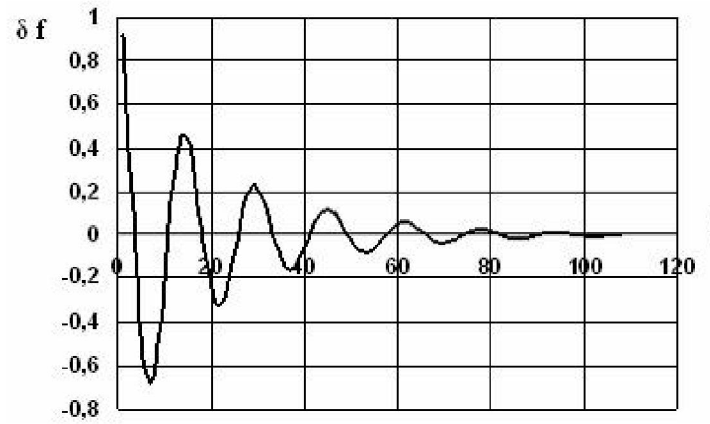
$$
\begin{aligned}
\eta(t_k) = {} & \frac{-(t_1+t_2)(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_1+\theta_{1c}\cos\Omega t_1+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_1+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_1)\eta(t_1)\left(\dfrac{t_k+t_{k+1}}{2}-t_1\right)}{1+\dfrac{1}{2}(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}-t_{k-1})(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_k+\theta_{1c}\cos\Omega t_k+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_k+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_k)} - {}\\
& - \frac{\sum\limits_{j=2}^{k-1}(t_{j+1}-t_{j-1})(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_1+\theta_{1c}\cos\Omega t_j+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_j+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_{j1})\eta(t_j)\left(\dfrac{t_k+t_{k+1}}{2}-t_j\right)}{1+\dfrac{1}{2}(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}-t_{k-1})(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_k+\theta_{1c}\cos\Omega t_k+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_k+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_k)} + {}\\
& + \frac{\dot\eta_0\dfrac{t_k+t_{r+1}}{2}+\eta_0}{1+\dfrac{1}{2}(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}-t_{k-1})(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_k+\theta_{1c}\cos\Omega t_k+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_k+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_k)} .
\end{aligned}
\tag{7}
$$

При выделении на АЧХ рис. 1 (кривая 2) три области частот в дорезонансном, резонансном и послерезонансных режимах колебаний исследована устойчивость колебаний физически нелинейной системы методом частичной дискретизации. Параметры системы принимались теми же, что и для случая рис.1. Шаг дискретизации по времени принимался $\Delta t = 0{,}05$.

Из рис. 4 видно хорошее согласие результатов исследования с графиками АЧХ на рис. 1. Дорезонансные и послерезонансные режимы колебаний носят затухающий характер (рис. 4, а, в), что не противоречит физическому смыслу исследуемых явления. В области же резонансных частот наблюдается рост амплитуды колебаний, что говорит о неустойчивости процесса.

Таким образом, применение метода частичной дискретизации к исследованию устойчивости колебаний позволяет отследить по заданным АЧХ зоны устойчивых и неустойчивых колебаний системы.

а



б

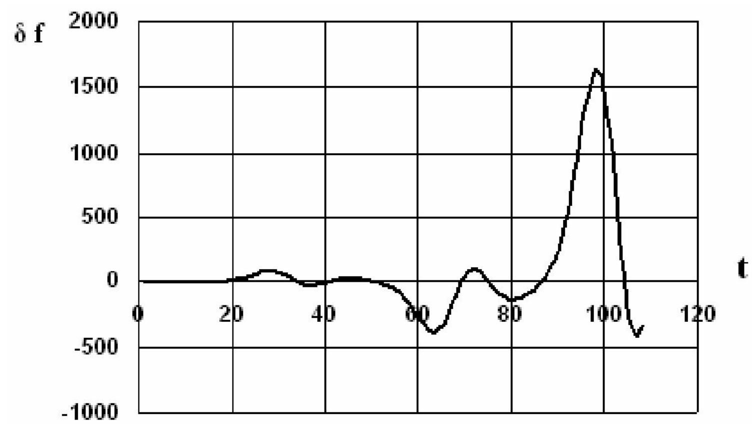
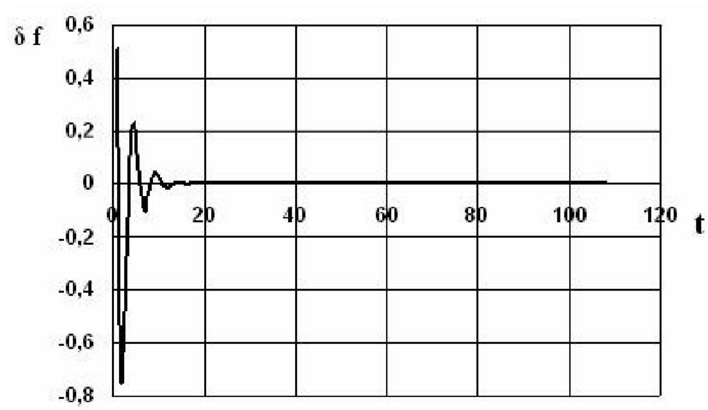


Рис. 4. Поведение физически нелинейной системы в зонах дорезонансных (а), в резонансных (б) и послерезонансных (в) режимов колебаний при $k_1 = 0,2; k_2 = 0,1; \alpha_1 = 5; \alpha_2 = 0,5; F_0 = 5; F_1 = 50$.
а – устойчивость колебательного процесса в дорезонансной зоне (Ω = 0,5; r = 1,5);
б – неустойчивость колебательного процесса в резонансной зоне (Ω = 1,8; r = 8);
в – устойчивость колебательного процесса в послерезонансной зоне (Ω = 7,26; r = 0,15)

в



ЛИТЕРАТУРА

1. *Хаджиева Л.А., Кыдырбекулы А.Б.* Об устойчивости движения упругих звеньев плоских МВК // Вестник КазГУ. Сер. мат., мех., инф. 1996. № 4. С. 191-194.

2. *Khidirbekuhli A., Khajiyeva L.* The dynamic stability of flat planar linked mechanisms with regard for nonlinear characteristics of elastic links // IX Int.Conf. on the Theory of Machines and Mechanisms, Czech Republic. 2004. P. 373-379.

3. *Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Хаджиева Л.А.* Динамическая устойчивость нелинейно-упругих стержневых систем //X Межвуз. конф. по матем. и мех. Алматы, 2004. Т. 1. С. 46-52.

4. *Амандосов А.А., Алмухамбетов С.С., Молдакулов Н.З.* Колебания гибких тел при произвольном повороте поперечных элементов // Вестник АН КазССР. 1987. №6. С. 60-68.

5. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. М.: Машиностроение, 1979. Т. 2. 352 с.

6. *Айталиев Ш.М., Кыдырбекулы А.Б., Хаджиева Л.А.* Анализ устойчивости движения нелинейных деформируемых систем методом частичной дискретизации // ДАН НАН РК. 2006 . №1. С. 54-60.

7. *Кыдырбекулы А.Б., Хаджиева Л.А.* Об устойчивости движения нелинейных систем // Изв. НАН РК. Сер. физ.-

мат. 2006 . №1. С. 37-40.

8. *Тюреходжаев А.Н.* Некоторые проблемы современной инженерной практики // Матер. межд. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения». Алматы, 2005. Т. 1. С. 11-28.

Резюме

Бұрыңғы басылымдармен салыстырғандағы айырмашылығы – физикалық сызықтық емес күйі көрсетілген. Оның жүйе тербелістерінің орнықтылығына әсері А. Н. Төреходжаевтың әдістемесі бойынша дискретті түрде алынған теңдеудің интегралдық қисығы арқылы шыққан ұйтқыған күйдің Хилл типіндегі теңдеудің шешімі арқылы анықталады. Мұның бәрі процестің квазианалитикалық бағалауын беріп нақты мысалдармен дәлелденеді.

Summary

In contradiction to former publications physical nonlinearity is isolated. Her influence on stability of fluctuations of system is determined by behaviour of the decision of the equation of type Hill for the indignant condition received by discrete representation by an integrated curve of the equation by a technique of A. N. Tjurehodzhaev. It gives kvazianalitical an estimation of process that is shown by concrete examples.

Институт механики и машиноведения им. У. А. Джолдасбекова;

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Поступила 16.10.06 г.