УДК 517.95.958

А. В. АЛЕКСЕЕВА

ПРОСТРАНСТВЕННО ДВУМЕРНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ А3, А7, А11, ПОРОЖДЕННЫЕ БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМОЙ Н3

Предложен метод вывода новых пространственно двумерных солитонных уравнений А3, А7, А11 по заданной билинейной форме Н3.

В настоящее время постоянно возрастает число физически важных интегрируемых нелинейных систем [1–3]. Среди моделей теории классического поля оказалось уравнение Кортевега-де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение sin-Гордона и др. [2]. Их называют солитонными уравнениями, поскольку они имеют точные аналитические решения – солитоны. При этом особый упор делается на их универсальность и широкую распространенность [2]. Например, уравнение Кортевега-де Фриза появилось в теории волн на мелкой воде. Теперь оно встречается в теории решеток, физике плазмы и магнитогидродинамике [4]. Оно описывает ионноакустические волны, длинные волны в сдвиговых потоках [5] и множество других ситуаций. Нелинейное уравнение Шредингера также возникает в оптике [6], в теории волн на глубокой воде [7], при описании переноса энергии вдоль α-спиралей белков [8, 9]. Уравнение sin-Гордон охватывает такие области, как дислокации в кристаллах, джозефсоновские сверхпроводящие контакты, волны зарядовой плотности в одномерных органических проводниках и модели теории поля.

Некоторые пространственно двумерные аналоги уравнения Кортевега-де Фриза рассматривались в работах [10–13]. Универсальность этих моделей позволяет находить многомерные эволюционные уравнения, учитывая специфику и свойства солитонных уравнений.

В работе предложен вывод новых пространственно двумерных солитонных уравнений А3, А7, А11. Эти уравнения являются обобщениями уравнения Кортевега-де Фриза. Они порождаются билинейной формой Н3, которая является комплексным пространственно двумерным обобщением билинейной формы Хироты [14].

Вывод пространственно двумерных солитонных уравнений А3, А7, А11 по заданной билинейной форме Н3. Для вывода воспользуемся следующим свойством. Солитонные уравнения имеют билинейную форму, которая позволяет построить их N-солитонные решения, используя метод Хироты. Билинейный оператор Хироты имеет вид

$$D_x^m D_y^k D_t^n (f\cdot g) = \left(\partial_x - \partial_{x'}\right)^m \left(\partial_y - \partial_{y'}\right)^k \times$$

$$\theta\left(\partial_t - \partial_{t'}\right)^n f(x,y,t) g(x',y',t')\Big|_{x'=x,y'=y,t'=t}.$$

Рассмотрим пространственно двумерную билинейную форму, которую назовем *формой Н3*:

$$\left(D_x D_t + D_x D_y^3\right)\left(\varphi\cdot\varphi\right) = 0, \tag{1}$$

где $\varphi = \varphi(x,y,t)$ – достаточно гладкая комплекснозначная функция,

$$D_x D_t \left(\varphi\cdot\varphi\right) \quad 2\left(\varphi_{xt}\varphi - \varphi_x\varphi_t\right), \tag{2}$$

$$D_x D_y^3 \left(\varphi\cdot\varphi\right)$$

$$2\left(\varphi_{xyyy}\varphi - \varphi_{yyy}\varphi_x - 3\varphi_{xyy}\varphi_y + 3\varphi_{yy}\varphi_{xy}\right). \tag{3}$$

Лемма 1. Форма Н3 (1)–(3) является комплексным пространственно двумерным обобщением классической билинейной формы Хироты для уравнения Кортевега-де Фриза [14]:

$$\left(D_x D_t + D_x^4\right)\left(f\cdot f\right) = 0, \tag{4}$$

где $f = f(x,t)$ – достаточно гладкая действительная функция,

$$D_x D_t (f\cdot f) = 2\left(f_{xt} f - f_x f_t\right), \tag{5}$$

$$D_x^4 (f\cdot f) = 2(f_{xxxx} f - 4 f_{xxx} f_x + 3 f_{xx}^2). \tag{6}$$

Доказательство. Для доказательства леммы 1 достаточно показать, что существует линейное преобразование

$$x = a_{11}x' + a_{12}y', \quad y = a_{21}x' + a_{22}y', \quad t = t', \tag{7}$$

которое при определенных условиях приводит билинейную форму Н3 (1)–(3) к билинейной форме (4)–(6). Найдем частные производные функции $\varphi = \varphi(x,y,t)$ и возьмем $\varphi = g(x',t')$, где $g = g(x',t')$ – достаточно гладкая действительная функция, т.е. $g_{y'} = 0$. Тогда

$$\varphi_t = g_{t'}, \quad \varphi_x = \frac{a_{22}}{|A|} g_{x'}, \quad \varphi_y = -\frac{a_{12}}{|A|} g_{x'},$$

$$\varphi_{xt} = \frac{a_{22}}{|A|} g_{x't'}, \quad \varphi_{xy} = -\frac{a_{12}a_{22}}{|A|^2} g_{x'x'},$$

$$\varphi_{yyy} = -\frac{a_{12}^3}{|A|^3} g_{x'x'x'}, \quad \varphi_{yy} = \frac{a_{12}^2}{|A|^2} g_{x'x'},$$

$$\varphi_{xyy} = \frac{a_{12}^2 a_{22}}{|A|^3} g_{x'x'x'}, \quad \varphi_{xyyy} = -\frac{a_{12}^3 a_{22}}{|A|^4} g_{x'x'x'x'}.$$

Здесь $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Подставим производные в форму Н3 (1)-(3), получим

$$\frac{2a_{22}}{|A|}\left(g_{x't'}g - g_{x'}g_{t'}\right) - \tag{8}$$

$$-\frac{2a_{12}^3 a_{22}}{|A|^4}\left(g_{x'x'x'x'}g - 4g_{x'x'x'}g_{x'} + 3g_{x'x'}^2\right) = 0.$$

Сопоставляя уравнение (8) с билинейной формой (4)–(6), заключаем, что $g = f$, когда $\frac{a_{22}}{|A|} = -\frac{a_{12}^3 a_{22}}{|A|^4} = 1$. Мы видим, что при условии

$$a_{21} + a_{11} = 1, \quad a_{22} + a_{12} = 0, \tag{9}$$

уравнение (8) совпадает с билинейной формой (4)–(6), что и требовалось показать. Лемма 1 доказана полностью.

Рассмотрим пространственно двумерные нелинейные уравнения, *которые назовем уравнениями*

A3: $\psi_t + \psi_{yyy} + 3(\psi U)_y = 0,$

$$U_x = \psi_y,\ \psi = 2(\ln\varphi)_{xy}, \qquad (10)$$

A7: $\psi_t + \psi_{yyy} + 3(WV)_x = 0,$

$$W_x = \psi_y,\ V_{xx} = \psi_{yy},\ \psi = 2(\ln\varphi)_{xx}, \qquad (11)$$

A11: $\psi_t + \psi_{yyy} + 3F_{yy} = 0,$

$$F_x = \psi Q,\ Q_y = \psi_x,\ \psi = 2(\ln\varphi)_{yy}. \qquad (12)$$

Здесь $\varphi = \varphi(x,y,t)$, $\psi = \psi(x,y,t)$ – достаточно гладкие комплекснозначные функции, $\ln\varphi = \ln|\varphi| + i\arg\varphi, -\pi < \arg\varphi \le \pi$.

Теорема 1. Уравнения A3, A7, A11 являются комплексным пространственно двумерным обобщением классического уравнения Кортевега-де Фриза:

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0, \qquad (13)$$

где $u = 2(\ln f)_{xx}$, $f = f(x,t)$, $u = u(x,t)$ – достаточно гладкие действительные функции.

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что существует такое преобразование (7), которое переводит уравнения (10)–-(12) в уравнение (13). Действительно, найдем частные производные функций $\psi = \psi(x,y,t)$, $U = U(x,y,t)$, $V = V(x,y,t)$, $W = W(x,y,t)$, $Q = Q(x,y,t)$, $F = F(x,y,t)$ и возьмем $\psi = v(x',t')$, $U = U^*(x',t')$, $V = V^*(x',t')$, $W = W^*(x',t')$, $Q = Q^*(x',t')$, $F = F^*(x',t')$, где $v = v(x',t')$, $U^* = U^*(x',t')$, $V^* = V^*(x',t')$, $W^* = W^*(x',t')$, $Q^* = Q^*(x',t')$, $F^* = F^*(x',t')$ – достаточно гладкие действительные функции, т.е. $v_{y'} = U^*_{y'} = V^*_{y'} = W^*_{y'} = Q^*_{y'} = F^*_{y'} = 0$. Тогда

$$\psi_t = v_{t'},\quad \psi_{yyy} = -\frac{a_{12}^3}{|A|^3}v_{x'x'x'},\quad \psi_y = -\frac{a_{12}}{|A|}v_{x'},$$

$$\psi_x = \frac{a_{22}}{|A|}v_{x'},\quad \psi_{yy} = -\frac{a_{12}^2}{|A|^2}v_{x'x'},\ U_x = \frac{a_{22}}{|A|}U^*_{x'},$$

$$U_y = -\frac{a_{12}}{|A|}U^*_{x'},\quad U^* = -\frac{a_{12}}{a_{22}}v \text{ при } c^*(t) = 0,$$

$$W_x = \frac{a_{22}}{|A|}W^*_{x'},\quad W^* = -\frac{a_{12}}{a_{22}}v \text{ при } c_1^*(t) = 0,$$

$$V_{xx} = \frac{a_{22}^2}{|A|^2}V^*_{x'x'},\quad V^*_{x'} = \frac{a_{12}^2}{a_{22}^2}v_{x'},\quad V^* = \frac{a_{12}^2}{a_{22}^2}v$$

$$\text{при } c_2^*(t) = c_3^*(t) = 0,$$

$$\psi Q = vQ^*,\ Q_y = -\frac{a_{12}}{|A|}Q^*_{x'},\quad Q^* = -\frac{a_{22}}{a_{12}}v$$

$$\text{при } c_4^*(t) = 0,$$

$$F_x = \frac{a_{22}}{|A|}F^*_{x'},\quad F^*_{x'} = -\frac{|A|}{a_{12}}v^2,$$

$$F_y = v^2,\quad F_{yy} = -\frac{a_{12}}{|A|}2vv_{x'}.$$

Подставим частные производные в уравнения (10)–(12), получим

$$v_{t'} - \frac{a_{12}^3}{|A|^3}v_{x'x'x'} + \frac{a_{12}^2}{|A|a_{22}}6vv_{x'} = 0, \qquad (14)$$

$$v_{t'} - \frac{a_{12}^3}{|A|^3}v_{x'x'x'} - \frac{3a_{12}^3}{|A|a_{22}^2}vv_{x'} - \frac{3a_{12}^3}{a_{22}^3}vv_{x'} = 0, \qquad (15)$$

$$v_{t'} - \frac{a_{12}^3}{|A|^3}v_{x'x'x'} - \frac{a_{12}}{|A|}6vv_{x'} = 0. \qquad (16)$$

Сопоставляя уравнения (14)–(16) с уравнением (13), приходим к выводу

$$v = u,\quad -\frac{a_{12}^3}{|A|^3} = \frac{a_{12}^2}{|A|a_{22}} = 1,$$

$$-\frac{a_{12}^3}{|A|^3} = -\frac{a_{12}^3}{|A|a_{22}^2} = -\frac{a_{12}^3}{a_{22}^3} = 1,$$

$$-\frac{a_{12}^3}{|A|^3} = -\frac{a_{12}}{|A|} = 1.$$

Откуда имеем (9) и

$$v = u,\quad a_{12} = \frac{a_{11}a_{22}}{a_{21} - 1}. \qquad (17)$$

Следовательно, при условии (9) уравнения (14), (15) и при условии (17) уравнение (16) совпадают с уравнением (13), что и требовалось показать. Теорема 1 доказана полностью.

Теорема 2. Уравнения A3, A7, A11 можно представить в виде формы H3; и наоборот, форме H3 соответствуют уравнения A3, A7, A11.

Доказательство. *Необходимость.* Подставим значение функции ψ в уравнения А3, А7, А11, получим

$$U = 2(\ln\varphi)_{yy} + c_1(y,t),\ W = 2(\ln\varphi)_{xy} + c_2(y,t),$$

$$V = 2(\ln\varphi)_{yy} + c_3(y,t)x + c_4(y,t),$$

$$Q = 2(\ln\varphi)_{xy} + c_5(x,t),$$

$$F = \partial_x^{-1}\{4(\ln\varphi)_{yy}(\ln\varphi)_{xy}\} + c_6(y,t).$$

Возьмем $c_1(y,t) = c_2(y,t) = c_3(y,t) = c_4(y,t) = = c_5(y,t) = c_6(y,t) = 0$. Тогда:

$$2(\ln\varphi)_{xyt} + 2(\ln\varphi)_{xyyy} + +12((\ln\varphi)_{yy}(\ln\varphi)_{xy})_y = 0, \qquad (18)$$

$$2(\ln\varphi)_{xxt} + 2(\ln\varphi)_{xxyy} + +12((\ln\varphi)_{yy}(\ln\varphi)_{xy})_x = 0, \qquad (19)$$

$$2(\ln\varphi)_{yyt} + 2(\ln\varphi)_{yyyy} + +12\left[\partial_x^{-1}\{(\ln\varphi)_{yy}(\ln\varphi)_{xy}\}\right]_{yy} = 0. \qquad (20)$$

Проинтегрируем обе части равенств (18)–(20) по переменной y при условии $c_7(x,t) = c_8(y,t) = = c_9(x,t) = c_{10}(x,t) = 0$, продифференцируем (20) по переменной x и умножим на φ^2:

$$2(\varphi_{xt}\varphi - \varphi_x\varphi_t) + 2(\varphi_{xyyy}\varphi - \varphi_{yyy}\varphi_x - -3\varphi_{xyy}\varphi_y + 3\varphi_{yy}\varphi_{xy}) = 0.$$

Откуда в силу (2), (3) получаем (1), что и требовалось показать.

Достаточность. Рассмотрим уравнение (1). Подставим (2), (3) в уравнение (1) и умножим обе части полученного равенства на φ^{-2}:

$$2(\varphi_{xt}\varphi - \varphi_x\varphi_t)\varphi^{-2} + 2(\varphi_{xyyy}\varphi - \varphi_{yyy}\varphi_x - 3\varphi_{xyy}\varphi_y + +3\varphi_{yy}\varphi_{xy})\varphi^{-2} = 0. \qquad (21)$$

Первое слагаемое равенства (21) представляет собой производную логарифма функции φ:

$$2\partial_x\partial_t(\ln\varphi) = 2(\varphi_{xt}\varphi - \varphi_x\varphi_t)\varphi^{-2}. \qquad (22)$$

Выделим логарифм функции φ и его частные производные из второго слагаемого (21):

$$2\partial_x\partial_y^3(\ln\varphi) \quad 2\left(\varphi_{xyyy}\varphi - \varphi_{yyy}\varphi_x - 3\varphi_{xyy}\varphi_y - -3\varphi_{yy}\varphi_{xy}\right)\varphi^{-2} + 12\varphi^{-3}\left(\varphi_{yy}\varphi_x\varphi_y + \varphi_y^2\varphi_{xy}\right) - -12\varphi_y^3\varphi_x\varphi^{-4}, \qquad (23)$$

$$12\partial_y^2(\ln\varphi)\partial_x\partial_y(\ln\varphi) = =12\left(\varphi_{yy}\varphi_{xy}\varphi^2 - \varphi_{yy}\varphi_x\varphi_y\varphi - \varphi_{xy}\varphi_y^2\varphi - \varphi_y^3\varphi_x\right)\varphi^{-4}. \qquad (24)$$

В силу (22)–(24) уравнение (21) принимает вид

$$2\partial_x\partial_t(\ln\varphi) + 2\partial_x\partial_y^3(\ln\varphi) + +12\partial_y^2(\ln\varphi)\partial_x\partial_y(\ln\varphi) \quad 0. \qquad (25)$$

Продифференцируем обе части равенства (25) k–1 раз по переменной x и l раз по переменной y. После некоторых преобразований получим

$$\partial_t\left[2\partial_x^k\partial_y^l(\ln\varphi)\right] + \partial_y^3\left[2\partial_x^k\partial_y^l(\ln\varphi)\right] + \partial_x^k\partial_y^l\left[12\partial_x^{-1}\left(\partial_y^2(\ln\varphi)\partial_x\partial_y(\ln\varphi)\right)\right] = 0. \qquad (26)$$

Введем обозначение

$$\psi = 2\partial_x^k\partial_y^l(\ln\varphi), \qquad (27)$$

где $k + l = 2$, $k,l = \overline{0,2}$, $\psi = \psi(x,y,t)$, $\varphi = \varphi(x,y,t)$ – достаточно гладкие комплекснозначные функции. Тогда уравнение (26) примет вид

$$\partial_t\psi + \partial_y^3\psi + \partial_x^k\partial_y^l\Phi = 0, \qquad (28)$$

где $\Phi_x = 12\partial_y^2(\ln\varphi)\partial_x\partial_y(\ln\varphi)$.

Уравнение (28) содержит в себе три вида комплексных пространственно двумерных солитонных уравнений. Действительно, при $k = 1$ и $l = 1$ из (27), (28) получаем уравнение А3, при $k = 2$ и $l = 0$ – уравнение А7, при $k = 0$ и $l = 2$ – уравнение А11, что и требовалось показать. Теорема 2 доказана полностью.

Таким образом, мы показали метод нахождения новых многомерных эволюционных уравнений по заданной билинейной форме. Следуя этому методу, мы нашли пространственно двумерные солитонные уравнения А3, А7, А11 (10)–(12). Эти уравнения являются обобщениями уравнения Кортевега-де Фриза (13). Они порождены заданной комплексной пространственно двумерной билинейной формой Н3 (1), которая является обобщением билинейной формы Хироты (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория солитонов / Под ред. С.П. Новикова. М., 1980. 319 с.

2. *Ньюэлл А.* Солитоны в физике и математике. М., 1989. 326 с.

3. *Фадеев Л.Д., Тахтаджан Л.А.* Гамильтонов подход к теории солитонов. М., 1986. 527 с.

4. *Захаров Б.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерная автомодуляция волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1971. Т. 74. С. 118-134.

5. *Miura R.* The Korteweg-de Vries equation, a survey of results // SIAM. Rev. 18(1976). P. 412-459.

6. *Scott A.C., Chu F.Y.F., Mchaughlin D.W.* The soliton: A new consept in applied science // Proc. IEEE. 61(1973). P. 1443-1483.

7. Lake B.M., Yuen H.C., Rungaldier H., Ferguson W.E. Nonlinear deep water waves: theory and experiment // Part 2. J. Fluid Mech. 83(1977).

8. *Davydov A.S.* The role of solitons in the energy and electron transfer in one-dimensional molecular systems // Physica D. 3(1981). P. 1-22.

9. Hyman J.M., Mchaughlin D.W. and Scott A.C. One Davydov'alpha-helix solitons // Physica D. 3(1981). P. 23-44.

10. *Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.* Об устойчивости уединенных волн в среде со слабой дисперсией // ДАН СССР. 1970. Т. 192. С. 753-756.

11. *Веселов А.П., Новиков С.П.* Конечнозначные двумерные потенциальные операторы Шредингера. Явные формулы и эволюционные уравнения // ДАН СССР. 1984. Т. 279. С. 20.

12. *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. Киев, 1991. 232 с.

13. *Алексеева А.В.* Новые солитонные уравнения А2, А6, А10, порожденные билинейной формой Н2 // Журнал проблем эволюции открытых систем. Алматы. Т. 2, вып. 7. 2005. С. 62-67.

14. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987. 477 с.

Резюме

Н3 бейсызықтық формасымен берілген А3, А7, А11 екі өлшемдері солитонды кеңістік теңдеулерін алудың жаңа әдістері ұсынылған.

Summary

The method of the deduction of new solidly two-dimensional soliton equations A3, A7, A11 by the given bilinear form H3 is proposed.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 30.10.06г.