УДК 531.31; 519.21

М. И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ

ОБ ОБРАТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С НЕПРЯМЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Рассматриваются две постановки задачи восстановления в классе стохастических дифференциальных уравнений типа Ито по заданным свойствам движения, зависящим от части переменных, и с управлением по первой производной (задача 1), и с управлением по второй производной (задача 2). В этих задачах определяется множество уравнений регулятора, обеспечивающих необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия.

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых (ОДУ) [2, 3]. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в работе [3].

Постановка задачи. Задача 1 (стохастическая задача восстановления с управлением по производным первого порядка). Пусть задана система дифференциальных уравнений типа Ито:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t), \\ \dot{y} = g_1(x, y, t) + \sigma_1(x, y, t)\dot{\xi}. \end{cases} \qquad (1)$$

Требуется построить уравнение регулятора [второе уравнение системы (1)], т. е. определить коэффициенты $g_1(x,y,t)$ и $\sigma_1(x,y,t)$ так, чтобы множество

$$\Lambda(t):\lambda(x,t)=0\,, \quad \text{где} \quad \lambda \in C^{22}_{xt}\,,\ \lambda \in R^m \qquad (2)$$

было интегральным многообразием системы уравнений (1).

Задача 2 (стохастическая задача восстановления с управлением по производным второго порядка). Пусть задана система дифференциальных уравнений типа Ито:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,t), \quad x \in R^n, \\ \ddot{y} = g_2(x,y,t) + \sigma_2(x,y,t)\dot{\xi}, \quad y \in R^r, \quad \xi \in R^k. \end{cases} \qquad (1')$$

Требуется построить уравнение регулятора [второе уравнение системы (1')] по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t):\lambda(x,t)=0\,, \quad \lambda \in C^{33}_{xt}. \qquad (2')$$

Иначе говоря, по заданным вектор-функциям *f*, λ определим коэффициенты $g_2(x,y,t)$ и $\sigma_2(x,y,t)$ так, чтобы множество (2') было интегральным многообразием системы уравнений (1').

Здесь $x \in R^n, y \in R^r, \xi \in R^k$, а σ – матрица размерности ($r\times k$), $\{\xi_1(t,\omega),...,\xi_k(t,\omega)\}$– система независимых винеровских процессов [4], заданная на некотором вероятностном пространстве (Ω, U, P).

Вектор непрямого управления $y \in R^r$ изменяется в соответствии с уравнением динамики регулятора в виде стохастического уравнения Ито первого порядка в задаче 1 и второго порядка в задаче 2.

Предполагается, что вектор-функции $f(x,\dot{x},t)$, $g_1(x,y,t)$, $g_2(x,y,t)$ и матрицы $\sigma_1(x,y,t)$, $\sigma_2(x,y,t)$ непрерывны по t и липшицевы по x и y в области

$$U_H(\Lambda)=\{z=(x^T,y^T)^T:\rho(z,\Lambda(t))<H,\ H>0\}, \qquad (3)$$

что обеспечивает в (3) существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $(x(t)^T, y(t)^T)^T$ уравнения (1) с начальным условием $(x(t_0)^T, y(t_0)^T)^T=(x_0^T, y_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [4].

Указанные задачи в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma \equiv 0$) достаточно полно исследованы в [2,3], а стохастический случай с исходным уравнением второго порядка и множеством вида $\Lambda(t):\lambda(x,\dot{x},t) = 0, \lambda \in C^{121}_{x\dot{x}t}$ – в работе [5].

Для решения данных задач используется метод квазиобращения Р. Г. Мухарлямова [3], в основе которого лежит

Лемма 1[3, с.12-13]. *Совокупность всех решений линейной системы*

$$H\vartheta = g, \quad H=(h_{\mu k}), \quad \vartheta=(\vartheta_k), \quad g=(g_\mu),$$

$$\mu=\overline{1,m}, \quad k=\overline{1,n}, \quad m \le n, \qquad (4)$$

где матрица H имеет ранг, равный m, определяется выражением

$$\vartheta = s[HC]+H^+g. \qquad (5)$$

Здесь s – произвольная скалярная величина, $[HC]=[h_1 \ldots h_m\ c_{m+1} \ldots c_{n-1}]$ есть векторное произведение векторов $h_\mu=(h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho=(c_{\rho k})$, $\rho=\overline{m+1,n-1}$; $H^+=H^T(HH^T)^{-1}$, H^T – матрица, транспонированная к H.

1. Решение задачи 1. Следуя правилу стохастического дифференцирования сложной функции $\lambda=\lambda(x,t)$, составим уравнение возмущенного движения

$$\ddot{\lambda} = \lambda_x \dot{f} + f^T\lambda_{xx} f + 2\lambda_{xt} f + \lambda_{tt}, \qquad (6)$$

где

$$\dot{f} = f_x f + f_y \cdot (g_1+\sigma_1\dot{\xi}) + f_t + \frac{1}{2} f_{yy} : \sigma\sigma^T + f_t.$$

С помощью обозначения

$$G_1 = \lambda_x\left[f_x f + \frac{1}{2} f_{yy} : \sigma\sigma^T + f_t\right] + $$

$$+ f^T\lambda_{xx} f + 2\lambda_{xt} f + \lambda_{tt},$$

перепишем (6) в виде

$$\ddot{\lambda} = G_1 + \lambda_x f_y g_1 + \lambda_x f_y \sigma_1 \dot{\xi}. \qquad (7)$$

Далее, следуя методу Н. П. Еругина [1], введем произвольные функции: m-мерную вектор-функцию A_1 и ($m\times k$)-матрицу B_1, которые удовлетворяют условиям $A_1(0,0,x,y,t)\equiv 0,\ B_1(0,0,x,y,t)\equiv 0$, такие, что

$$\ddot{\lambda} = A_1(\lambda,\dot{\lambda},x,y,t)+B_1(\lambda,\dot{\lambda},x,y,t)\dot{\xi}. \qquad (8)$$

На основе уравнений (7) и (8) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \lambda_x f_y g_1 = A_1 - G_1, \\ \lambda_x f_y \sigma_1 = B_1, \end{cases} \tag{9}$$

из которых нужно определить множество управляющих параметров $\{g_1\}$ и множество матриц диффузий $\{\sigma_1\}$. Обозначая $H_1 = \lambda_x f_y$ и используя формулу (5) леммы 1, из соотношений (9) определяем вектор-функцию g_1

$$g_1 = s_1[H_1 C] + (H_1)^+ (A_1 - G_1) \tag{10}$$

и столбцы матрицы диффузии $\{\sigma_{1i}\}$ в виде

$$\sigma_{1i} = s_2[H_1 C] + (H_1)^+ (B_{1i}), \quad i = \overline{1,k}, \tag{11}$$

где s_1, s_2 – произвольные скалярные величины.

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы система уравнений (1) имела заданное интегральное многообразие (2), необходимо и достаточно, чтобы множество вектор-функций $\{g_1\}$ имело вид (10), а множество матриц диффузии $\{\sigma_1\}$ – вид (11).*

Замечание 1.1. В скалярном случае $x \in R^1$, $y \in R^1$, $\lambda \in R^1$, $\lambda \in C^{22}_{xt}$ задачи 1 уравнение возмущенного движения в результате двукратного стохастического дифференцирования примет вид

$$\ddot{\lambda} = \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t}\right) f + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\dot{f} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}, \tag{12}$$

где $\dot{f} = \dfrac{\partial f}{\partial x} f + \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(g_1 + \sigma_1 \dot{\xi}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\sigma_1^2}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Обозначим

$$\widetilde{G}_1 = \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t}\right) f + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2},$$

тогда (12) запишется в виде

$$\ddot{\lambda} = G_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} g_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_1 \dot{\xi}. \tag{13}$$

Введем произвольные скалярные функции Н. П. Еругина [1] $a_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t)$, $b_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t)$, которые удовлетворяют условиям $a_1(0,0,x,y,t) \equiv$ $\equiv b_1(0,0,x,y,t) \equiv 0$, и такие, что

$$\ddot{\lambda} = a_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t) + b_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t)\dot{\xi}. \tag{14}$$

Сравнивая (13) и (14), приходим к соотношениям

$$a_1 = \widetilde{G}_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} g_1, \tag{15}$$

$$b_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_1, \tag{16}$$

из которых нужно определить управляющий параметр g_1 и коэффициент диффузии σ_1.

Из соотношений (15) и (16) получаем

$$g_1 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1}\left(a_1 - \widetilde{G}_1\right), \tag{17}$$

$$\sigma_1 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1} b_1. \tag{18}$$

Следовательно, справедливо утверждение

Следствие 1.1. *Для того чтобы система уравнений (1) в скалярном случае $x \in R^1$, $y \in R^1$, $\lambda \in R^1$, $\lambda \in C^{22}_{xt}$ обладала интегральным многообразием (2), необходимо и достаточно, чтобы коэффициент сноса g_1 имел вид (17), а коэффициент диффузии σ_1 – вид (18).*

2. Решение задачи 2. В силу стохастического дифференцирования сложной функции найдем последовательно вторую и третью производные функции $\lambda = \lambda(x,t)$:

$$\ddot{\lambda} = \lambda_x \dot{f} + f' \lambda_{xx} f + 2\lambda_{xt} f + \lambda_{tt},$$

$$\dddot{\lambda} = (\lambda_{xx} + \lambda_{xt})\dot{f} + \lambda_x \ddot{f} + \dot{f}^T \lambda_{xx} f +$$

$$+ f^T(\lambda_{xxx} + \lambda_{xxt}) f + f^T \lambda_{xx}\dot{f} +$$

$$+ 2\lambda_{xxt} f + 2\lambda_{xt}\dot{f} + \lambda_{xtt} + \lambda_{ttt}, \tag{19}$$

где $\dot{f} = f_x f + f_y \dot{y} + f_t$,

$$\ddot{f} = (f_{xx} f + f_{xy}\dot{y} + f_{xt}) f + f_x \dot{f} +$$

$$+ (f_{yx} f + f_{yy}\dot{y} + f_{yt}) \cdot \dot{y} + f_y \ddot{y} + f_{tx} f + f_{ty}\dot{y} + f_{tt}.$$

Введем обозначение

$$G_2 = (\lambda_{xx} + \lambda_{xt})\dot{f} + \lambda_x[(f_{xx} f + f_{xy} y + f_{xt}) f +$$

$$+ f_x \dot{f} + (f_{yx} f + f_{yy}\dot{y} + f_{yt})\dot{y} + f_{tx} f +$$

$$+ f_{ty}\dot{y} + f_{tt}] + \dot{f}^T \lambda_{xx} f + f^T(\lambda_{xxx} + \lambda_{xxt}) f +$$

$$+ f^T \lambda_{xx}\dot{f} + 2\lambda_{xxt} f + 2\lambda_{xt}\dot{f} + \lambda_{xtt} + \lambda_{ttt},$$

тогда уравнение возмущенного движения (17) запишется в виде

$$\dddot{\lambda} = G_2 + \lambda_x f_y g_2 + \lambda_x f_y \sigma_2 \dot{\xi}. \qquad (20)$$

Далее, следуя методу Еругина [1], введем произвольную m-мерную вектор-функцию $A_2(\lambda, \dot\lambda, \ddot\lambda, x, y, t)$ и матрицу $B_2(\lambda, \dot\lambda, \ddot\lambda, x, y, t)$, которые удовлетворяют условиям $A_2(0,0,0,x,y,t) \equiv 0$, $B_2(0,0,0,x,y,t) \equiv 0$, такие, что имеет место соотношение

$$\dddot{\lambda} = A_2(\lambda, \dot\lambda, \ddot\lambda, x, y, t) + B_2(\lambda, \dot\lambda, \ddot\lambda, x, y, t)\dot{\xi}. \quad (21)$$

Сравнивая (18) и (19), получаем соотношения

$$\begin{cases} \lambda_x f_y g_2 = A_2 - G_2, \\ \lambda_x f_y \sigma_2 = B_2, \end{cases} \qquad (22)$$

из которых нужно определить множества коэффициентов сноса $\{g_2\}$ и матриц диффузий $\{\sigma_2\}$.

Обозначая через $H_2 = \lambda_x f_y$ и используя метод квазиобращения [3] из соотношений (20), определяем множество $\{g_2\}$ в виде

$$g_2 = s_3[H_2 C_1] + (H_2)^+(A_2 - G_2), \qquad (23)$$

а столбцы множества матриц диффузий $\{\sigma_2\}$ – в виде

$$\sigma_{2i} = s_4[H_2 C_1] + (H_2)^+(B_{2i}), \quad i = \overline{1,k}, \qquad (24)$$

где s_3, s_4 – произвольные скалярные величины.

Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы система уравнений (1') имела заданное интегральное многообразие (2'), необходимо и достаточно, чтобы множество вектор-функций $\{g_2\}$ имело вид (23), а множество матриц диффузий $\{\sigma_2\}$ – вид (24).*

Замечание 2.1. В скалярном случае $x \in R^1$, $y \in R^1$, $\lambda \in R^1$, $\lambda \in C^{22}_{xt}$ задачи 2 уравнение возмущенного движения в результате трехкратного стохастического дифференцирования примет вид

$$\dddot{\lambda} = \left(\left(\frac{\partial^3\lambda}{\partial x^3} f + \frac{\partial^3\lambda}{\partial x^2 \partial t}\right) f + \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}\dot f + \frac{\partial^3\lambda}{\partial x \partial t \partial x} f + \frac{\partial^3\lambda}{\partial x \partial t^2}\right) f + 2\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2\lambda}{\partial x \partial t}\right)\dot f + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\ddot f + \left(\frac{\partial^3\lambda}{\partial t \partial x^2} f + \frac{\partial^3\lambda}{\partial t \partial x \partial t}\right) f + \frac{\partial^2\lambda}{\partial t \partial x}\dot f + \frac{\partial^3\lambda}{\partial t^2 \partial x} f + \frac{\partial^3\lambda}{\partial t^3}, \qquad (25)$$

где

$$\ddot f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dot y + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\right) f + \frac{\partial f}{\partial x}\dot f + \dot y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dot y + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}\right)\dot y + \frac{\partial f}{\partial y}\ddot y + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}\dot y + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Обозначим

$$\tilde G_2 = \left(\left(\frac{\partial^3\lambda}{\partial x^3} f + \frac{\partial^3\lambda}{\partial x^2 \partial t}\right) f + \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}\dot f + \frac{\partial^3\lambda}{\partial x \partial t \partial x} f + \frac{\partial^3\lambda}{\partial x \partial t^2}\right) f + 2\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2\lambda}{\partial x \partial t}\right)\dot f + \left(\frac{\partial^3\lambda}{\partial t \partial x^2} f + \frac{\partial^3\lambda}{\partial t \partial x \partial t}\right) f + \frac{\partial^2\lambda}{\partial t \partial x}\dot f + \frac{\partial^3\lambda}{\partial t^2 \partial x} f + \frac{\partial^3\lambda}{\partial t^3} + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dot y + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\right) f + \frac{\partial f}{\partial x}\dot f + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dot y + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}\right)\dot y + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}\dot y + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right],$$

тогда (25) запишется в виде

$$\dddot{\lambda} = \tilde G_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} g_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_2\dot\xi. \qquad (26)$$

Далее, следуя методу Н. П. Еругина [1], введем произвольные скалярные функции $a_2(\lambda, \dot\lambda, \ddot\lambda, x, y, t)$ и $b_2(\lambda, \dot\lambda, \ddot\lambda, x, y, t)$, которые удовлетворяют следующему условию: $a_2(0,0,0,x,y,t) \equiv b_2(0,0,0,x,y,t) \equiv 0$, такие, что

$$\dddot{\lambda} = a_2(\lambda, \dot\lambda, \ddot\lambda, x, y, t) + b_2(\lambda, \dot\lambda, \ddot\lambda, x, y, t)\dot\xi. \quad (27)$$

Сравнивая (20) и (21), приходим к соотношениям

$$a_2 = \tilde G_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} g_2, \qquad (28)$$

$$b_2 = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_2, \qquad (29)$$

из которых нужно определить управляющий параметр g_2 и коэффициент диффузии σ_2.

Из соотношений (22) и (23) получаем

$$g_2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} \left(a_2 - \tilde{G}_2 \right), \qquad (30)$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} b_2 . \qquad (31)$$

Следовательно, справедливо утверждение

Следствие 2.1. *Для того чтобы система* уравнений (1') в скалярном случае $x \in R^1$, $y \in R^1$, $\lambda \in R^1$, $\lambda \in C_{xt}^{22}$ *обладала интегральным многообразием (2'), необходимо и достаточно, чтобы коэффициент сноса g_2 имел вид (30), а коэффициент диффузии σ_2 – вид (31).*

Полученные результаты обобщают на стохастический случай известные в классе ОДУ утверждения И. А. Мухаметзянова, Р. Г. Мухарлямова [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. 1952. Т. 10, вып. 16. С. 659-670.

2. *Галиуллин А.С.* Методы решения обратных задач динамики. М.,1986. 224 с.

3. *Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г.* Уравнения программных движений. М., 1986. 88 с.

4. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 632 с.

5. *Тлеубергенов М.И.* Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. М., 2001. Т. 3,. № 5. С. 714-716.

Резюме

Бірінші туындысымен (1 есеп) және екінші туындысымен (2 есеп) басқарылатын берілген қасиеттері бойынша айнымалы бөлігіне тәуелді Ито типтес стохастикалық дифференциалды теңдеулер класында қалпына келтіру есебі қарастырылады. Бұл есептерде берілген интегралды көпбейненің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттарын қамтамасыз ететін регулятор теңдеулерінің басқару жиыны анықталады.

Summary

Two statements of restriction's problem into the class of stochastic differential Ito's equations by given properties of motion, dependent from partial variables, and with the control by first derivative (problem 1) and with the control by second derivative (problem 2) are considered. The set of regulator's equations, which ensures the necessary and sufficient conditions of existence of given integral manifold is defined in these problems.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 26..09.06г.