УДК 531.31; 519.21

М. И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ, Г. Т. ИБРАЕВА

К СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ДИФФУЗИЕЙ

Рассматривается задача восстановления с вырождающейся по части переменных диффузией и заданным свойствам движения, зависящими от части переменных в классе стохастических дифференциальных уравнений первого порядка типа Ито, когда управление входит: 1) в коэффициент сноса, 2) в коэффициент диффузии и 3) как в коэффициент сноса, так и в коэффициент диффузии. В указанных случаях определяется вид управляющих параметров, обеспечивающий необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия.

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) [2, 3]. Настоящая работа является дальнейшим развитием результатов [4, 5]. В работе [4] задача восстановления рассматривается в классе уравнений Ито второго порядка с невырождающейся диффузией, а в работе [5] эта задача исследуется в классе уравнений Ито первого порядка с вырождающейся диффузией и заданными свойствами, зависящими от всех переменных.

1. Стохастическая задача с управлением сносу. Пусть задана система стохастических дифференциальных уравнений первого порядка типа Ито:

$$\begin{cases} \dot y = f_1(y,v,w,t), \qquad y \in R^{p_1}, \\ \dot v = f_2(y,v,w,t) + L_1 u_1(y,v,w,t), \quad v \in R^{p_2}, \\ \dot w = f_3(y,v,w,t) + L_2 u_2(y,v,w,t) + \\ +\sigma\dot\xi, w \in R^{p_3}, \quad \xi \in R^k. \end{cases} \tag{1.1}$$

Требуется определить входящие в коэффициент сноса вектор-функции $u_1 = u_1(y,v,w,t) \in R^{r_1}$ и $u_2 = u_2(y,v,w,t) \in R^{r_2}$ по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t):\ \lambda(y,t) = 0,\ \ \lambda = \lambda(y,t) \in C^{22}_{y\,t},\quad \lambda \in R^m, \tag{1.2}$$

где C^{22}_{yt} обозначает множество функций $\gamma(y,t)$, дважды непрерывно дифференцируемых по y и t. Здесь $p_1 + p_2 + p_3 = n,\ r_1 + r_2 = r$.

Предполагается, что $f_1, \in C^{1\,1\,2\,1}_{y\,v\,w\,t}$, а f_2, f_3 L_1, L_2, σ принадлежат классу функций ***K***-непрерывных по t и липшицевых по y, v и w в окрестности множества $\Lambda(t)$:

$$U_h(\Lambda) = \\ = \{y = (y^T, v^T, w^T)^T :\ \rho(y, \Lambda(t)) < h,\ \ h > 0\}. \tag{1.3}$$

В настоящей работе для решения стохастической задачи восстановления используется метод квазиобращения [3, с. 12].

Для решения поставленной задачи предварительно вычислим

$$\dot\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} f_1 \tag{1.4}$$

и далее по правилу стохастического дифференцирования Ито [6, с. 204] составим уравнение возмущенного движения

$$\ddot\lambda = \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + f_1^T \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} f_1 + \left(2\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) f_1 + \\ + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial v} f_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial w} f_3 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial v} L_1 u_1 + \\ + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial w} L_2 u_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial y} S_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial w}\sigma\dot\xi, \tag{1.5}$$

где $S_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial w^2} : \sigma\sigma^T$, а под $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial w^2} : D_1$, следуя [6], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(y,v,w,t)$ вектора $\lambda(y,v,w,t)$ по компонентам w на матрицу D_1, где $D_1=\sigma\sigma^T$.

Введем произвольные функции Еругина [1]: m-мерную вектор-функцию A и $(m\times k)$-матрицу B, обладающие свойством $A(0,0,y,v,w,t)\equiv 0$, $B(0,0,y,v,w,t)\equiv 0$, такие, что имеет место

$$\dot{\lambda}= A(\lambda,\dot{\lambda},y,v,w,t)+B(\lambda,\dot{\lambda},y,v,w,t)\dot{\xi}, \quad (1.6)$$

где ξ – тот же независимый винеровский процесс, входящий в (1.1).

На основе уравнений (1.5) и (1.6) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial v}L_1u_1+\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial w}L_2u_2 = A-\left(f+\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}S_1\right), \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial w}\sigma=B, \end{cases} \quad (1.7)$$

где

$$f=\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}+f_1^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}f_1+\left(2\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)f_1+$$
$$+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial v}f_2+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial w}f_3+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial t},$$

из которых нужно определить вектор-функции управления u_1, u_2 и матрицу σ. Для разрешения задачи потребуется

Лемма 1 [3, с. 12-13]. *Совокупность всех решений линейной системы*

$$H\vartheta=g,\quad H=(h_{\mu k}),\quad \vartheta=(\vartheta_k),\quad g=(g_\mu),$$
$$\mu=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,n},\quad m\le n, \qquad (1.8)$$

где матрица H имеет ранг, равный m, определяется выражением

$$\vartheta=s[HC]+H^+g. \qquad (1.9)$$

Здесь s – произвольная скалярная величина, $[HC]=[h_1\ldots h_m\, c_{m+1}\ldots c_{n-1}]$ *есть векторное произведение векторов* $h_\mu=(h_{\mu k})$ *и произвольных векторов* $c_\rho=(c_{\rho k})$, $\rho=\overline{m+1,n-1}$; $H^+=H^T\left(HH^T\right)^{-1}$, H^T *– матрица, транспонированная к H.*

Положим $u_1=q(y,v,w,t)$, где q – произвольная функция из класса K.

Обозначив $\widetilde{L}=\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial w}L_2$, по формуле (1.9) леммы 1 из соотношений (1.6), (1.7) определим искомые вектор-функцию u_2 и матрицу σ в виде

$$u_2=s_1\left[\widetilde{L}C\right]+$$
$$+\left(\widetilde{L}\right)^+\left[A-\left(f+S_1+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial v}L_1q\right)\right], \quad (1.10)$$

$$\sigma_i=s_2\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial w}\right)C\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial w}\right)^+\widetilde{B}_i, \quad (1.11)$$

где σ_i – i-й столбец матрицы $\sigma=(\sigma_{\nu j})$, $(\nu=\overline{1\ldots n})$, $(j=\overline{1\ldots k})$, $\widetilde{B}_i$ – i-й столбец матрицы $\widetilde{B}=\left(\widetilde{B}_{\mu l}\right)$.

Следовательно, справедлива теорема:

Теорема 1. *Для того чтобы дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито (1.1) имело заданное интегральное многообразие (1.2), необходимо и достаточно, чтобы при произвольно заданном управлении* $u_1=q(y,z,v,w,t)\in K$ *управляющая функция* u_2 *имела вид (1.10), а матрица диффузий* σ *удовлетворяла условию (1.11).*

2. Линейный случай стохастической задачи с управлением по сносу. По заданному линейному по сносу стохастическому дифференциальному уравнению первого порядка типа Ито:

$$\begin{cases} \dot{y}=D_1(t)y+D_2(t)v+D_3(t)w+d(t), \\ \dot{v}=F_1(t)y+F_2(t)v+F_3(t)w+F_4u_1+f(t), \\ \dot{w}=G_1(t)y+G_2(t)v+G_3(t)w+G_4u_2+ \\ +g(t)+\sigma_1(t)\dot{\xi} \end{cases} \quad (2.1)$$

требуется определить вектор-функции управления $u_1=u(y,v,w,t)$ и $u_2=u(y,v,w,t)\in R^r$ по заданному линейному интегральному многообразию

$$\Lambda(t):\quad \lambda\equiv H_1y+h(t)=0,\quad H_1,h\in C_t^2. \quad (2.2)$$

Предположим, что $D_1,D_2,D_3,d(t)\in C_t^2$, а $F_1,F_2,F_3,F_4,f(t),G_1,G_2,G_3,\ G_4,g(t)\in C_t^0$. В рассматриваемой задаче уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\ddot\lambda = K_1(t)y + K_2(t)v + K_3(t)w + K_4(t) + H_1(t)D_2(t)F_4(t)u_1 + H_1(t)D_3(t)G_4(t)u_2 + H_1(t)D_3(t)\sigma_1(t)\dot\xi, \quad (2.3)$$

где

$$K_1(t) = \ddot H_1(t) + 2\dot H_1(t)D_1(t) + H_1(t)\dot D_1(t) + H_1(t)D_1^2(t) + H_1(t)D_2(t)F_1(t) + H_1(t)D_3(t)G_1(t),$$

$$K_2(t) = 2\dot H_1(t)D_3(t) + H_1(t)\dot D_3(t) + H_1(t)D_1(t)D_2(t) + H_1(t)D_2(t)F_2(t) + H_1(t)D_3(t)G_2(t),$$

$$K_3(t) = 2\dot H_1(t)D_3(t) + H_1(t)\dot D_3(t) + H_1(t)D_1(t)D_3(t) + H_1(t)D_2(t)F_3(t) + H_1(t)D_3(t)G_3(t),$$

$$K_4(t) = \ddot h(t) + 2\dot H_1(t)d(t) + H_1(t)\dot d(t) + H_1(t)D_1(t)d(t) + H_1(t)D_2(t)f(t) + H_1(t)D_3(t)g(t),$$

а, с другой стороны, с помощью произвольной вектор-функции Еругина $A = A_1(t)\lambda + A_2(t)\dot\lambda$ и матрицы-функции B_1 со свойством $B_1(0,0,y,v,w,t) \equiv 0$ имеем

$$\ddot\lambda = A_1(t)\lambda + A_2(t)\dot\lambda + B_1(\lambda,\dot\lambda,y,v,w,t)\dot\xi,$$

которое после подстановки $\lambda = \lambda(y,t)$ можно переписать в виде

$$\ddot\lambda = \bar H_1(t)y + \bar H_2(t)v + \bar H_3(t)w + \bar H_4(t) + B_1\dot\xi, \quad (2.4)$$

где

$$\bar H_1(t) = A_1(t)H_1(t) + A_2(t)\dot H_1(t) + A_2(t)H_1(t)D_1(t),$$

$$\bar H_2(t) = A_2(t)H_1(t)D_2(t),$$

$$\bar H_3(t) = A_2(t)H_1(t)D_3(t),$$

$$\bar H_4(t) = A_1(t)h(t) + A_2(t)\dot h(t) + A_2(t)H_1(t)d(t).$$

Отсюда из соотношений (2.3) и (2.4) следуют равенства

$$\begin{cases} H_1(t)D_2(t)F_4(t)u_1 + H_1(t)D_3(t)G_4u_2 = \\ = \bar H_1(t)y + \bar H_2(t)v + \bar H_3(t)w + \\ + \bar H_4(t) - \left(K_1(t)y + K_2(t)v + K_3(t)w + K_4(t)\right), \\ H_1(t)D_3(t)\sigma_1 = B_1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Положим $u_1 = q_1(y,v,w,t)$, где $q_1 \in K$. Тогда из равенств (2.5) с использованием леммы 1 имеем

$$u_2 = s_1\left[\tilde D C\right] + \left(\tilde D\right)^+ d_1, \quad (2.6)$$

$$\sigma_{1i} = s_2\left[\left(H_1(t)D_3(t)\right)C\right] + \left(H_1(t)D_3(t)\right)^+ B_{1i}, \quad (2.7)$$

где $\tilde D$ и d_1 имеют соответственно вид $\tilde D = H_1(t)D_3(t)G_4(t)$, $d_1 = \left(\bar H_1(t)y + \bar H_2(t)v + \bar H_3(t)w + \bar H_4(t)\right) - \left[\left(K_1(t)y + K_2(t)v + K_3(t)w + K_4(t)\right) + \left(H_1(t)D_2(t)\right)F_4(t)q_1\right)\right]$, а через σ_{1i}, B_{1i} обозначены соответственно i-е столбцы матриц σ_1 и B_1. Здесь s_1, s_2 – произвольные скалярные величины. Тем самым доказана

Теорема 2. *Для того чтобы стохастическое линейное по сносу дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито (2.1) имело заданное линейное интегральное многообразие (2.2), необходимо и достаточно, чтобы при произвольно заданной $u_1 \equiv q_1$, $q_1 \in K$ управляющий параметр u_2 имел вид (2.6), а матрица диффузий σ_1 удовлетворяла условию (2.7).*

3. Стохастическая задача восстановления с управлением по диффузии. Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито

$$\begin{cases} \dot y = L_1(y,w,t), \quad y \in R^{\tilde p_1}, \\ \dot w = L_3(y,w,t) + T(y,w,t)\dot\xi, \\ w \in R^{\tilde p_2}, \quad \tilde p_1 + \tilde p_2 = n. \end{cases} \quad (3.1)$$

Требуется определить матрицу диффузий T по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t): \lambda(y,t) = 0,$$

где $$\lambda = \lambda(y,t) \in C^{22}_{yt}, \quad \lambda \in R^m. \quad (3.2)$$

Предположим $L_1 \in C^{1121}_{yvwt}$, а $L_2, L_3, T \in C^0_t$. По правилу стохастического дифференцирования Ито [6,с.204] составляется уравнение возмущенного движения:

$$\ddot\lambda = \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + L_1^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}L_1 + \left(2\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial L_1}{\partial y}\right)L_1 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial L_1}{\partial w}\right)L_3 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}S_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial L_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial L_1}{\partial w}\right)T\dot\xi, \quad (3.3)$$

где $S_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 L_1}{\partial w^2} : TT^T$.

Введем произвольные функции Н. П. Еругина [1]: m-мерную вектор-функцию A_3 и $(m\times k)$-матрицу B_3, обладающие свойством $A_3(0,0,y,w,v,t) \equiv$ $\equiv 0, B_2(0,0,y,w,v,t) \equiv 0$, такие, что имеет место

$$\ddot{\lambda} = A_3(\lambda,\dot{\lambda},y,v,w,t) + B_2(\lambda,\dot{\lambda},y,v,w,t)\dot{\xi}. \quad (3.4)$$

На основе уравнений (3.3) и (3.4) приходим к соотношениям

$$M + \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 L_1}{\partial w^2} : TT^T\right] = A_3, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial L_1}{\partial w}T = B_2, \quad (3.6)$$

из которых требуется определить T, где

$$M = \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \left(2\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial L_1}{\partial y}\right)L_1 +$$
$$+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial L_1}{\partial w}L_3 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial L_1}{\partial t} + L_1^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}L_1.$$

Из уравнений (3.6) в силу формулы (1.8) леммы 1 *определим общий вид искомой матрицы T*

$$T_i = s_2\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial L_1}{\partial w}\right)C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial L_1}{\partial w}\right)^+ B_{2i}, \quad (3.7)$$

где T_i – i-й столбец матрицы $T = (T_{\nu j})$, $(\nu = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,k)$; B_{2i} – i-й столбец матрицы $B = (B_{2\mu l}), (\mu = 1,\ldots,m; l = 1,\ldots,k)$.

Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Для того чтобы дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито (3.1) имело заданное интегральное многообразие (3.2), необходимо и достаточно, чтобы управляющая матрица диффузий T имела вид (3.7), а коэффициенты уравнения (3.1) удовлетворяли условию (3.5).*

4. Стохастическая задача восстановления с управлениями по сносу и диффузии. Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито

$$\begin{cases} \dot{y} = C_1(y,v,w,t), \\ \dot{v} = C_2(y,v,w,t) + D_1u_1, \\ \dot{w} = C_3(y,v,w,t) + D_2u_2 + Q(t)\dot{\xi}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Требуется определить r-мерную вектор-функцию $u_2 = u_2(y,v,w,t)$ и $(n\times k)$-матрицу Q по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t) : \lambda(y,t) = 0,$$

где $$\lambda = \lambda(y,t) \in C_{y\,t}^{2\,2}, \quad \lambda \in R^m. \quad (4.2)$$

По правилу дифференцирования Ито в случае процессов с независимыми приращениями [6, с. 204] составляется уравнение возмущенного движения

$$\ddot{\lambda} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \left(2\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)C_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial v}C_2 +$$
$$+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial w}C_3 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial v}D_1u_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial w}D_2u_2 + \quad (4.3)$$
$$+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial t} + C_1^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}C_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}S_3 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial w}\right)Q\dot{\xi},$$

где $S_3 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 C_1}{\partial w^2} : QQ^T$.

Введем произвольные функции Н. П. Еругина [1]: m-мерную вектор-функцию A_4 и $(m\times k)$-матрицу B_4, обладающие свойством $A_4(0,0,y,w,v,t) \equiv 0$, $B_3(0,0,y,w,v,t) \equiv 0$, такие, что имеет место

$$\ddot{\lambda} = A_4(\lambda,\dot{\lambda},y,v,w,t) + B_3(\lambda,\dot{\lambda},y,v,w,t)\dot{\xi}. \quad (4.4)$$

Из уравнений (4.3) и (4.4) следуют соотношения

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial v}\right)D_1u_1 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial w}\right)D_2u_2 = A_4 - \left[b + \frac{\partial\lambda}{\partial y}S_3\right], \\ \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial w}\right)Q = B_3, \end{cases} \quad (4.5)$$

где $$b = \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \left(2\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)C_1 +$$
$$+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial v}\right)C_2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial w}\right)C_3 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial t} +$$
$$+C_1^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}C_1,$$ из которых требуется определить вектор-функцию u_2 и матрицу Q. Положим $u_1 = q_2(y,v,w,t) \in \mathrm{K}$. Обозначая через

$\widetilde{D} = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial w}\right)D_2$ и используя лемму 1, из соотношений (4.5) определим искомые вектор-функцию u и матрицу Q в виде

$$u_2 = s_1\left[\widetilde{D}C\right] + \left[\widetilde{D}\right]^+ d_2, \qquad (4.6)$$

$$Q_i = s_2\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial w}\right)C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial w}\right)^+ B_{3i}. \qquad (4.7)$$

где $d_2 = A_4 - \left[b + \frac{\partial\lambda}{\partial y}S_3\right] - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial v}\right)D_1 q_2$.

Следовательно, справедлива

Теорема 4. *Для того чтобы дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито (4.1) имело заданное интегральное многообразие (4.2), необходимо и достаточно, чтобы при произвольно заданном* $u_1 = q_2(y, v, w, t) \in \mathrm{K}$ *управляющая функция* u_2 *имела вид (4.6), а матрица диффузий* Q – вид (4.7).

5. Скалярный случай задачи восстановления с управлениями по сносу и диффузии. Пусть задана система двух скалярных стохастических дифференциальных уравнений первого порядка типа Ито:

$$\begin{cases} \dot{y} = g_1(y,z,t), \quad y \in R^1, \\ \dot{z} = g_2(y,z,t) + \gamma_1(y,z,t)u_1 + \\ +\left[\gamma(y,z,t) + \gamma_2(y,z,t)u_2\right]\dot{\xi}, \quad z \in R^1. \end{cases} \qquad (5.1)$$

Требуется определить скалярные функции $u_1 = u_1(y,z,t)$ и $u_2 = u_2(y,z,t)$ по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t): \mu(y,t) = 0,$$

где $$\mu = \mu(y,t) \in C^{2\,2}_{y\,t}, \quad \mu \in R^1. \qquad (5.2)$$

По правилу стохастического дифференцирования составляется уравнение возмущенного движения

$$\dot{\mu} = \frac{\partial^2\mu}{\partial t^2} + \left(2\frac{\partial^2\mu}{\partial t\partial y} + \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)g_1 + \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}g_2 +$$

$$+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}\gamma_1 u_1 + \frac{\partial\mu}{\partial y}S_4 + g_1^T\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}g_1 +$$

$$+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}\left[\gamma + \gamma_2 u_2\right]\dot{\xi}, \qquad (5.3)$$

где $S_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2}\cdot\left(\gamma + \gamma_2 u_2\right)^2$.

Введем произвольные скалярные функции Н. П. Еругина: $A_5 = A_5(\mu, \dot{\mu}, y, z, t)$ и $B_4 = B_4(\mu, \dot{\mu}, y, z, t)$, обладающие свойством $A_5(0,0,y,z,t) \equiv 0$, $B_4(0,0,y,z,t) \equiv 0$, такие, что имеет место

$$\dot{\mu} = A_5(\mu, \dot{\mu}, y, z, t) + B_4(\mu, \dot{\mu}, y, z, t)\dot{\xi}. \qquad (5.4)$$

Отсюда из уравнений (5.4) и (5.5) следуют соотношения

$$\begin{cases} \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}\gamma_1 u_1 = A_5 - \left(b_2 + \frac{\partial\mu}{\partial y}S_4\right), \\ \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}\gamma_2 u_2 = B_4 - \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}\gamma. \end{cases} \qquad (5.5)$$

где $b_2 = \frac{\partial^2\mu}{\partial t^2} + \left(2\frac{\partial^2\mu}{\partial t\partial y} + \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)g_1 + \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}g_2 +$

$+ g_1^T\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}g_1 + \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial t}$.

Тогда управляющие параметры u_1 и u_2 в силу равенства (5.5) определим в виде

$$u_1 = \left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}\gamma_1\right)^{-1}\left[A_5 - \left(b_2 + \frac{\partial\mu}{\partial y}S_7\right)\right], \qquad (5.6)$$

$$u_2 = \left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}\gamma_2\right)^{-1}\left[B_4 - \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}\gamma\right]. \qquad (5.7)$$

Или с учетом (5.7) соотношение (5.6) эквивалентно условию

$$u_1 = \left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}\gamma_1\right)^{-1}\left[A_5 - \left(b_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\gamma + \gamma_2\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}\gamma_2\right)^{-1}\left[B_4 - \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}\gamma\right]\right]\right)^2\right)\right]. \qquad (5.8)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 5. *Для того чтобы скалярное дифференциальное уравнение первого порядка типа Ито (5.1) имело заданное интегральное многообразие (5.2), необходимо и достаточно, чтобы управляющие параметры u_1 и u_2 имели соответственно вид (5.8) и (5.7).*

Таким образом, в работе получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи восстановления с вырождающейся по части переменных диффузией и с заданными свойствами, зависящими от части переменных в общем нелинейном, линейном, а также скалярном нелинейном случаях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. 1952. Т. 10, вып. 16. С. 659-670.

2. *Галиуллин А.С.* Методы решения обратных задач динамики. М.: Наука, 1986. 224 с.

3. *Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г.* Уравнения программных движений. М.: РУДН, 1986. 88 с.

4. *Тлеубергенов М.И.* Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 5. С. 714-716.

5. *Тлеубергенов М.И., Ибраева Г.Т.* Об обратной стохастической задаче восстановления с вырождающейся диффузией // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2006. № 1. С. 22-27.

6. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990. 632 с.

Резюме

1) Көшіру коэффициентіне, 2) диффузия коэффициентіне, 3) көшіру және диффузия коэффициенттеріне басқару кіретін кездерде диффузияның айнымалыларының бөлігі бойынша азынған және қозғалыстың берілген қасиеті бар, бөліктік айнымалыға тәуелді Ито типтес бірінші ретті стохастикалық дифференциалды теңдеулер класында қайта құру есебі қарастырылады. қарастырылған жағдайда берілген интегралды көпбейненің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттарын қамтамасыз ететін басқару параметрінің түрі анықталады.

Summary

The restriction’s problem with a diffusion degenerating by partial variables and given properties of motion, depending form partial variables into the class of stochastic differential Ito’s equations of first order are considered when the control contains: 1) in the coefficient of drift, 2) in the coefficient of diffusion, and 3) as in the coefficient of drift as in the coefficient of diffusion. The form of control parameters, which ensures the necessary and sufficient conditions of existence of given integral manifold is defined in indicated cases.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 26.09.06г.