УДК 532.5: 517.994

А. Ш. АКЫШ

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

В процессе изучения постановки начально-краевых задач для нелинейных нестационарных уравнений Навье–Стокса (УНС) получено граничное условие для уравнения Пуассона относительно давления P и доказано, что трехмерная задача для нелинейных нестационарных УНС однозначно разрешима при естественных требованиях от входных данных в целом по времени $t \in [0,T]$, $\forall\ T < \infty$.

Современное состояние теории уравнений Навье–Стокса (УНС) содержится в [1–3]. Здесь в процессе изучения постановки начально-краевых задач для нелинейных нестационарных УНС получено граничное условие для уравнения Пуассона относительно давления P и доказано, что трехмерная задача нелинейных нестационарных УНС однозначно разрешима при естественных требованиях от входных данных в целом по времени $t \in [0,T]$, $\forall\ T < \infty$.

Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Навье–Стокса относительно вектора скорости $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ и давления P в области $Q = (0,T] \times \Omega$:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mu\Delta\mathbf{U} + (\mathbf{U}, \Delta)\mathbf{U} + \Delta P = \mathbf{f}(t,x), \qquad (1a)$$

$$div\mathbf{U} = 0, \qquad (1b)$$

$$\mathbf{U}(0,x) = \Phi(x), \qquad (1c)$$

$$\mathbf{U}(t,x)\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \qquad (1d)$$

где $x \in \Omega \subset R_3$; W – выпуклая область, заполненная однородной жидкостью, а $\partial\Omega$ – ее граница, $t \in [0,T]$, $\forall\ T < \infty$, $\mathbf{f}(t,x)$ и $\mathbf{\Phi}(x)$ – вектор-функции соответственно внешних сил и начальных данных; $0 < m$ – динамический коэффициент вязкости; ∇ и Δ – операторы Лапласа и Гамильтона соответственно.

Пусть $\overset{o}{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ – пространство соленоидальных векторов из $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $\forall p \geq 2$, а **G**(W) состоит из D*h*, где *h* есть однозначная в W – функция; известно ([2], стр.37) ортогональное разложение $\mathbf{L}_2(Q) = \mathbf{G}(Q) \oplus \overset{o}{\mathbf{J}}_2(Q)$, причем элементы $\overset{o}{\mathbf{J}}_2(Q)$ при $\forall t$ принадлежат $\overset{o}{\mathbf{J}}_2(\Omega)$, а элементы **G**(*Q*) – подпространству **G**(W); $W^k_{p,0}(\Omega)$ – соболевское пространство функции равные нулю на $\partial\Omega$; $L_\infty\left((0,T];W^k_p(\Omega)\right)$ – пространство измеримых по *t* и при каждом $t \in (0,T]$, принимающих значения из $W^k_p(\Omega)$.

Предположим, что входные данные задачи (1) удовлетворяют следующим требованиям:

a) вектор-функция

$\mathbf{f}(t,x) \in \mathbf{L}_\infty((0,T];\overset{o}{\mathbf{J}}_p(\Omega))$, $\forall p \geq 2$, ибо ее градиентную часть можно отнести к ∇P;

b) начальная вектор-функция

$\Phi(x) \in \overset{o}{\mathbf{J}}_p(\Omega) \text{I } \mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega)$, $\forall p \geq 2$.

Применим операцию *div* к уравнениям (1a). Тогда, с учетом (1b), получаем уравнение Пуассона, связывающее давление P с вектором скорости **U**:

$$-\Delta P = div\mathbf{I}, \text{ где } \mathbf{I} = (\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}, \; t \in (0,T]. \quad (2)$$

Умножим (2) на произвольную функцию $\eta(t,x) \in L_\infty((0,T];W^1_{2,0}(\Omega))$ и с помощью интегрирования по частям найдем

$$\int_\Omega (\nabla P + \mathbf{I})\nabla\eta dx = 0, \; \forall t \in (0,T]. \quad (3)$$

Формально полагая вектор-функцию $\mathbf{I} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ при $\forall t \in (0,T]$, представим ее в виде суммы $\mathbf{I} = \nabla I^{(\mathbf{G})} + \mathbf{I}^{(\mathbf{J})}$, где $\nabla I^{(\mathbf{G})} \in \mathbf{G}(\Omega)$, $\mathbf{I}^{(\mathbf{J})} \in \overset{o}{\mathbf{J}}(\Omega)$ при $\forall t \in (0,T]$. Подставляя ее в функциональное уравнение (3) находим $\nabla P = -\nabla I^{(G)}$. Тогда $\nabla P = \mathbf{I}^{(\mathbf{J})} - \mathbf{I}$. Откуда $\left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$, $t \in (0,T]$, так как $\mathbf{I}^{(\mathbf{J})} n\big|_{\partial\Omega} = 0$ и $\mathbf{I}n\big|_{\partial\Omega} = 0$ соответственно в силу $\mathbf{I}^{(\mathbf{J})} \in \overset{o}{\mathbf{J}}(\Omega)$ и (1d), где *n* есть единичный вектор внешней нормали в точке *x* границы $\partial\Omega$.

В итоге из начально-краевой задачи для уравнений Навье–Стокса (1) получена задача Неймана для уравнения Пуассона относительно давления *P*:

$$-\Delta P = div\{(\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}\}, \quad (4a)$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \; t \in (0,T]. \quad (4b)$$

Задачу (1) вместе с задачей (4) будем называть *полной постановкой начально-краевой задачи для уравнений Навье-Стокса.*

Будем пользоваться известными неравенствами Гельдера

$$\left|\int_\Omega UVdx\right| \leq \left(\int_\Omega |U|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |V|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}; \quad (5)$$

его дискретным аналогом

$$\left|\sum_{i=1}^N U_i V_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^N |U_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^N |V_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad (6)$$

и Минковского

$$\left(\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^N V_i\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega |V_i|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (7)$$

а также Юнга для парных произведений

$$UV \leq \frac{1}{\varepsilon p}|U|^p + \frac{\varepsilon}{q}|V|^q, \; \varepsilon > 0, \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (8)$$

кроме всего, еще формулой интегрирования по частям

$$\int_\Omega V\Delta U dx = -\int_\Omega \nabla V \nabla U dx + \int_{\partial\Omega} V \frac{\partial U}{\partial n} dx$$

(9)

и общеизвестной теоремой о разрешимости задачи Неймана для уравнения Пуассона, например, из [4]:

Теорема 1. *Для того чтобы существовало обобщенное решение задачи*

$$-\Delta V = \varphi, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi \in L_2(\Omega) \wedge \int_\Omega \varphi dx = 0.$$

В этом предположении существует единственное обобщенное решение V, удовлетворяющее условию

$$V \in W_2^1(\Omega) \wedge \int_\Omega V dx = 0.$$

Любое другое обобщенное решение V' *этой задачи представляется в виде* $V' = V + c$, *где c – произвольная постоянная.*

Априорные оценки. В классе гладких решений задач (1), (4) установим некоторые априорные оценки. Умножим уравнение (1a) на произвольную вектор-функцию $\mathbf{V}(t,x) \in \mathbf{W}_2^1(Q)$, равную нулю при $t = T \ \wedge \ x \in \partial\Omega$, произведение проинтегрируем по области Q и с помощью интегрирования по частям, учитывая условия (1c), (1d), из первых двух слагаемых производные перенесем с **U** на **V**. В результате получим

$$\int_Q \left(-\mathbf{U}\mathbf{V}_t + \mu \sum_{k=1}^{3} \nabla U_k \nabla V_k + ((\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U} + \nabla P)\mathbf{V} \right) dxdt =$$

$$= \int_\Omega \Phi \mathbf{V}(0,x)dx + \int_Q \mathbf{f}\,\mathbf{V}dxdt, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

(10)

Аналогично, взяв произвольную функцию $\eta \in L_\infty((0.T];\ W_2^1(\Omega))$, из уравнения (4a) с помощью интегрирования по частям, учитывая условие (4b), находим тождество:

$$\int_\Omega \nabla P \nabla \eta \, dx = -\int_\Omega (\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}\nabla \eta dx, \ \forall t \in (0,T]. \quad (11)$$

Определение 1. *Назовем слабым обобщенным решением полной начально-краевой задачи Навье–Стокса (1) и (4), вектор-функцию* **U** *и функцию P из пространств*

$$\mathbf{U} \in \mathbf{L}_\infty((0,\mathbf{T}];\ \mathbf{W}_{2,0}^1(\Omega) \mathrm{I} \ \overset{o}{\mathbf{J}}_\infty(\Omega)),$$

$$P \in L_\infty((0,T];W_2^1(\Omega)) \wedge \left(\int_\Omega P dx = 0, \quad \forall t \in (0,T] \right)$$

и удовлетворяющие тождествам (10), (11) при любых

$$\mathbf{V}(t,x) \in \mathbf{W}_2^1(Q) \ \wedge \ \mathbf{V}\big|_{t=T \wedge x \in \partial\Omega} = 0,$$

$$\eta(t,x) \in L_\infty((0,T];W_2^1(\Omega)).$$

Для справедливости этого определения надо проверить, что все интегралы, входящие в (10) и (11), конечны для любых **V**, *h* из указанных классов.

Теорема 2. *Если входные данные задачи (1) и (4) удовлетворяют требованиям* **a)**, **b)**, *то для слабого обобщенного решения задачи (1) справедливы оценки:*

$$\left\| U_\alpha \right\|_{L_\infty((0,T];L_p(\Omega))} \le \sum_{k=1}^{3} \left\| \Phi_k \right\|_{L_p(\Omega)} +$$

$$+ T^2 \sum_{k=1}^{3} \left\| f_k \right\|_{L_\infty((0,T];L_p(\Omega))} \equiv A_1,$$

$$\alpha = \overline{1,3}, \ 2 \le p \le \infty, \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^{3} \int_0^t \left\| \nabla U_k(\tau) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{\mu} \left\| \Phi \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 + \frac{2T^2}{\mu} \left\| \mathbf{f} \right\|_{\mathbf{L}_\infty((0,T];\mathbf{L}_2(\Omega))}^2 \equiv A_2,$$

$$\forall t \in (0,T]. \quad (13)$$

Доказательство[1]. Умножим уравнение (1a) на вектор-функцию $p\mathbf{U}^{p-1}$ (*p* – четное число, $\mathbf{U}^q = (U_1^q, U_2^q, U_3^q)$), произведение проинтегрируем по области W и с помощью интегрирования по частям, преобразуем второе слагаемое. В результате получим

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \left| U_k \right|^p dx +$$

$$(p-1)p\mu \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \left| \nabla U_k \right|^2 \left| U_k \right|^{p-2} dx +$$

[1]Отметим, что оценка (13) общеизвестна [2].

$$+p\int_{\Omega}\big((\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}+\nabla P\big)\mathbf{U}^{p-1}dx=$$

$$=p\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}f_k U_k^{p-1}dx,\ t\in(0,T]. \qquad (14)$$

К правой части (14) дважды применяем неравенства Гельдера, сначала (6) к внутренней сумме, а затем (5) к интегралу и, пользуясь неотрицательностью второго интеграла в левой части, переходим к неравенству

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}|U_k|^p dx+p\int_{\Omega}\big((\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}+\nabla P\big)\mathbf{U}^{p-1}dx\le$$

$$\le p\left(\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}|U_k|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}|f_k|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$t\in(0,T].$$

(15)

Второй интеграл в левой части этого соотношения равен нулю, т.е.

$$\int_{\Omega}\big((\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}+\nabla P\big)\mathbf{U}^{p-1}dx=0,\ \forall p\ge 2,$$

$$\forall t\in(0,T]. \qquad (16)$$

Действительно, при $p = 2$ (16) является следствием ортогональности подпространств $\overset{o}{\mathbf{J}}_2(\Omega)$ и $\mathbf{G}$(W) (см. [2]). А когда $p > 2$ (16) получаем из тождества (11), заменив там градиент произвольной функции $\nabla\eta$ вектор-функцией $\mathbf{U}^{p-1}$, т.е.

$$\nabla\eta=\mathbf{U}^{p-1},\ p>2. \qquad (17)$$

Справедливость такой замены следует из задачи Неймана для h.

Тогда из неравенства (15) получим

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}|U_k|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}|f_k|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$t\in(0,T].$$

Последнее, проинтегрировав по t в пределах от 0 до t, найдем

$$\left(\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}|U_k(t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}|\Phi_k|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+T\left(\int_{Q_t}\sum_{k=1}^{3}|f_k|^p dxd\tau\right)^{\frac{1}{p}},\ t\in(0,T].$$

Отсюда, используя неравенство Минковского (7), приходим к первому утверждению (12) теоремы 2:

$$\left(\int_{\Omega}|U_\alpha(t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\sum_{k=1}^{3}\left(\int_{\Omega}|\Phi_k|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+T\sum_{k=1}^{3}\left(\int_{Q}|f_k|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\alpha=\overline{1,3},\ \forall t\in(0,T],\ 2\le p\le\infty.$$

Соотношение (14) при $p = 2$ проинтегрируем по t от 0 до t. Правую часть его оценим по неравенству Юнга (8) при $\varepsilon=\dfrac{1}{2T}$. Из конечного результата с учетом (16) получим неравенство для энергетической нормы $\mathbf{U}$:

$$\|\mathbf{U}(t)\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}+2\mu\int_0^t\sum_{k=1}^{3}\|\nabla U_k(\tau)\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}d\tau\le$$

$$\le\|\Phi\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}+0,5\|\mathbf{U}\|^2_{\mathbf{L}_\infty((0,T];\mathbf{L}_2(\Omega))}+$$

$$+2T^2\|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}_\infty((0,\mathbf{T}];\mathbf{L}_2(\Omega))},\ \forall t\in(0,T]. \qquad (18)$$

Отсюда имеем оценку для квадрата нормы функции $\mathbf{U}$

$$\|\mathbf{U}\|^2_{\mathbf{L}_\infty((0,\mathbf{T}];\mathbf{L}_2(\Omega))}\le 2\|\Phi\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}+$$

$$+4T^2\|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}_\infty((0,\mathbf{T}];\mathbf{L}_2(\Omega))}.$$

Используя последнее, снова из (18) находим неравенство (13). Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Для слабых обобщенных решений задач (1) и (4) имеют место оценки*

$$\|\nabla P\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)}\le\|(\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)}\le 3A_1^2A_2\equiv A_3. \qquad (19)$$

Доказательство. В тождестве (11) положим $\nabla\eta=\nabla P$ и проинтегрируем его по t от 0 до T, затем оценим правую часть по неравенству Юнга при $p=2\wedge\varepsilon=1$. В итоге получим неравенство

$$\|\nabla P\|^2_{L_2(Q)}\le\|(\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}\|^2_{L_2(Q)}.$$

Его правую часть оценим последовательно по неравенству Гельдера (5) при p = 2 и $p=\infty\wedge q=1$. В результате имеем цепочку

$$\|(\mathbf{U},\nabla)\mathbf{U}\|^2_{L_2(Q)}\le\int_Q|\mathbf{U}|^2\sum_{k=1}^3|\nabla U_k|^2dxdt\le$$

$$\le 3\max_k\|U_k\|^2_{L_\infty(Q)}\sum_{k=1}^3\int_0^T\|\nabla U_k(t)\|^2_{L_2(\Omega)}dt$$

из чего, на основании оценок (12), (13) следует (19).

Теорема единственности обобщенных решений.

Теорема 3. *Каждая задача (1) и (4) имеет единственное обобщенное решение соответственно из пространств*

$$\mathbf{L}_\infty\left((0,T];\mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega)\,\mathrm{I}\,\overset{o}{\mathbf{J}}_\infty(\Omega)\right),$$

$L_\infty\left((0,T];W^1_2(\Omega)\right)$, *если входные данные удовлетворяют требованием* **a)** *и* **b)**.

Доказательство. Пусть пара функций $\{\mathbf{U},P\}$ и $\{\mathbf{U}^*,P^*\}$– два решения задач (1) и (4). Положим $\mathbf{V}=\mathbf{U}-\mathbf{U}^*$, $R=P-P^*$, тогда имеем:

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}-\mu\Delta\mathbf{V}+(\mathbf{V},\nabla)\mathbf{U}+(\mathbf{U}^*,\nabla)\mathbf{V}+\nabla R=0,$$

$$div\mathbf{V}=0, \qquad (20a)$$

$$\mathbf{V}(0,x)=0,\ \mathbf{V}(t,x)\big|_{\partial\Omega}=0,\ x\in\partial\Omega, \qquad (20b)$$

$$-\Delta R=div\left[(\mathbf{V},\nabla)\mathbf{U}+(\mathbf{U}^*,\nabla)\mathbf{V}\right],\ \left.\frac{\partial R}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0,$$

$$t\in(0,T]. \qquad (21)$$

Из уравнений (20a) переходим к тождеству

$$\int_{Q_t}\Big(\mathbf{V}_t\mathbf{V}-\mu\Delta\mathbf{V}\mathbf{V}+(\mathbf{V},\nabla)\mathbf{U}\mathbf{V}+(\mathbf{U}^*,\nabla)\mathbf{V}\mathbf{V}+$$

$$+\nabla R\mathbf{V}\Big)dxd\tau=0,$$

$$\forall t\in(0,T]. \qquad (22)$$

В силу ортогональности подпространств $\overset{o}{\mathbf{J}}_2(Q_t)$ и $\mathbf{G}(Q_t)$ получим соотношения

$$\int_{Q_t}(\mathbf{U}^*,\nabla)\mathbf{V}\mathbf{V}dx=0,\quad\int_{Q_t}\nabla R\mathbf{V}dx=0,$$

$$\forall t\in(0,T],$$

все остальные члены преобразуем с помощью интегрирования по частям, тогда из (22) найдем

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{V}(t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\mu\sum_{k=1}^3\int_0^t\|\nabla V_k(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}d\tau=$$

$$=-\int_{Q_t}\sum_{k,\beta=1}^3V_\beta\frac{\partial V_k}{\partial x_\beta}U_kdxd\tau. \qquad (23)$$

Интеграл в правой части оценим последовательно по неравенству Гельдера при $p=\infty\wedge q=1$ и Юнга p = 2, в результате получим цепь неравенств

$$\left|\int_{Q_t}\sum_{k,\beta=1}^3V_\beta\frac{\partial V_k}{\partial x_\beta}U_kdxd\tau\right|\le\max_k\|U_k\|_{L_\infty(Q)}\,\Theta$$

$$\Theta\sum_{k,\beta=1}^3\int_{Q_t}\left|\frac{\partial V_k}{\partial x_\beta}\right||V_\beta|dxd\tau\le$$

$$A_1\varepsilon/2\sum_{k,\beta=1}^3\int_0^t\left\|\frac{\partial V_k}{\partial x_\beta}\right\|^2_{L_2(\Omega)}d\tau+A_4\int_0^t\sum_{\beta=1}^3\|V_\beta\|^2_{L_2(\Omega)}d\tau\le$$

$$\le A_1\varepsilon/2\sum_{k=1}^3\int_0^t\|\nabla V_k(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}d\tau+$$

$$+A_4\int_0^t\|V(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}d\tau,\ A_4=3A_1/(2\varepsilon).$$

Приняв во внимание оценки (12), (13) и воспользовавшись последним при $\varepsilon=2\mu/A_1$ из (23) найдем

$$\|\mathbf{V}(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\le A_4\int_0^t\|\mathbf{V}(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}d\tau,$$

$$A_4=3A_1^2/(4\mu),\ \forall t\in(0,T].$$

Откуда имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(-A_4t)\|\mathbf{V}(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\right)\le0,\quad\forall t\in(0,T].$$

(24)

Из неравенства (24) заключим, что **V** ≡ 0,

$\forall t \in (0,T]$, т.е. что решения $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}^*$ совпадают. Из (21) с помощью интегрирования по частям имеем

$$\left\| \nabla R \right\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \le \left\| \left[(\mathbf{V},\nabla)\mathbf{U} + (\mathbf{U}^*,\nabla)\mathbf{V} \right] \right\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)}, \quad \forall t \in (0,T].$$

Отсюда благодаря $\mathbf{V}$ ғ 0 получаем $\left\| \nabla R \right\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \le 0$, тем самым $\nabla R \equiv 0$, т.е. градиент давления P определяется единственным образом через вектор-функцию $\mathbf{U}$. Более того, на основании теоремы 1 из задачи (4) само давление находится однозначно, так как правая часть вычисляется однозначно через вектор-функцию $\mathbf{U}$. Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Разрешимость задачи (1) доказывается без особых затруднений благодаря единственности слабых обобщенных решений задач (1), (4) и установленных априорных оценок, например, методом Галеркина, следуя работе [2] . А для численного определения решений можно использовать одну из разностных схем [5].

Замечание 2. Теорема 3 о единственности слабых обобщенных решений задач (1), (4) справедлива для их сильных и классических решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.

2. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

3. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 316 с.

4. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 424 с.

5. *Акыш А.Ш.* Устойчивость в l_p некоторых разностных схем для одной системы нелинейных параболических уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики. Новосибирск, 2005. Т. 8, № 4. С. 273-280.

Резюме

Навье-Стокстің бейсызықты бейстационар теңдеулеріне бастапқы-шеттік есептердің қойылымымен шұғылдану барысында P қысымына байланысты Пуассон теңдеуіне шеттік шарт табылып, үш өлшемді бейсызықты бейстационар Навье-Стокс теңдеулерінің бастапқы деректерінің табиғи талаптарды қанағаттандыруына байланысты барлық уақыт аралығында бірмәнді шешілетіндігі дәлелденген.

Summary

In the process of the research of statement initial-boundary problems for nonlinear nonsteady Navier–Stokes equations (NSE) a boundary condition for Poisson's equation concerning power P has been received and it has been demonstrated, that three dimensional problem for nonlinear nonsteady NSE is global simply solved by natural demands of initial facts.

Институт математики МОН РК, г. Алматы

Поступила 17.03.2007 г.

УДК 517.948.34