М. К. ДАУЫЛБАЕВ, К. Ж. ТЛЕУБЕРДИН

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доказана теорема существования, единственности в аналитическом представлении решения сингулярно возмущенных линейных интегродифференциальных уравнений произвольного порядка с начальными усло-ви-ями в правой точке данного отрезка. Получены равномерные асимптотические оценки решения по малому параметру.

Для построения асимптотического разложения решений начальных и краевых задач необходимо исследование асимптотического поведения решения и его производных в точке разрыва при *e* ® 0. С этой целью в [1, 2] для линейных интегродифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, в которых ин-тегрирование ведется по промежутку 0 Ə *x* Ə 1, исследована задача Коши с явлением начального скачка (n–2)-го порядка в точке t = 0, а в [3] – любого порядка, тогда как решение соответствующей дифференциальной задачи стремится к бесконечности при *e* ® 0. Во всех указанных работах доказана теорема существования единственного решения и получено асимптотическое поведение решения в точке скачка при *e* ® 0.

В настоящей работе исследуется та же задача Коши для сингулярно возмущенных линейных интегродифференциальных уравнений произвольного порядка, но с промежутком интегрирования $a \leq x \leq 1$, где $0 < a < 1$. Получены теоремы существования, единственности и об оценках решения. Показано, что решение рассматриваемой интегродифференциальной задачи в точке $t = a$ обладает явлением начального скачка $(n-2)$-го порядка.

Полученные результаты позволяют построить с любой степенью точности по малому параметру асимптотические разложения решений не только линейных, но и нелинейных уравнений.

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ линейное дифференциальное уравнение:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon\, y^{(n)} + A_1(t) y^{(n-1)} + \ldots + A_n(t) y = F(t) \quad (1)$$

с начальными условиями в правой точке $t = 1$:

$$y(1,\varepsilon) = \alpha_0, \quad y'(1,\varepsilon) = \alpha_1, \ldots,$$
$$y^{(n-1)}(1,\varepsilon) = \alpha_{n-1}, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\alpha_i, i = \overline{0, n-1}$ – известные постоянные.

Пусть выполнены следующие условия:

I. Функции $A_i(t), i = \overline{1,n}$, $F(t)$ на отрезке $[0,1]$ являются достаточно гладкими.

II. $A_1(t) \geq \gamma = const > 0$, $0 \leq t \leq 1$. Решение дифференциальной задачи (1), (2) при условии II, как известно из [4, 5], уходит на бесконечность при $\varepsilon \to 0$ в полуинтервале $0 \leq t < 1$ и не имеет конечного предела. Добавим теперь в уравнение (1) интегральные члены

$$\int_a^1 [H_0(t,x) y(x,\varepsilon) + H_1(t,x) y'(x,\varepsilon) + \ldots +$$
$$+ H_{n-1}(t,x) y^{(n-1)}(x,\varepsilon)] dx,$$

где $0 < a < 1$, и тем самым вместо (1) получаем интегродифференциальное уравнение:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon\, y^{(n)} + A_1(t) y^{(n-1)} + \ldots + A_n(t) y = F(t) +$$
$$+ \int_a^1 [H_0(t,x) y(x,\varepsilon) + H_1(t,x) y'(x,\varepsilon) + \ldots +$$
$$+ H_{n-1}(t,x) y^{(n-1)}(x,\varepsilon)] dx. \quad (3)$$

В настоящей статье исследуется вопрос: асимптотическое поведение решения интегродифференциальной задачи (3), (2) аналогично ли указанному асимптотическому поведению решения дифференциальной задачи (1), (2)?

Для дальнейших исследований предположим выполнение следующих условий:

III. $H_i(t,x), i = \overline{0, n-1}$ в области $D = (0 \leq t \leq 1, a \leq x \leq 1)$ являются достаточно гладкими функциями.

IV. Число $l = 1$ при достаточно малых ε не является собственным значением ядра

$$K_\varepsilon(t,s) = K(t,s) -$$
$$- \frac{H_{n-1}(t,1)}{A_1(1)} \exp\left(\int_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)} dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 A_1(x) dx \right) + O(\varepsilon),$$

где

$$K(t,s) = \frac{1}{A_1(s)} \times$$
$$\times \left[H_{n-1}(t,s) + \frac{1}{\overline{W}(s)} \int_s^1 \sum_{j=0}^{n-1} H_j(t,x) \overline{W}_{n-1}^{(j)}(x,s) dx \right].$$

Здесь $\overline{W}(t)$ – вронскиан фундаментальной системы решений $\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t)$ вырожденного однородного дифференциального уравнения $L_0 \bar{y} = 0$, а $\overline{W}_{n-1}^{(j)}(t,s)$ – определитель, получаемый из вронскиана $\overline{W}(s)$ заменой его $(n-1)$-й строки строкой $\bar{y}_1^{(j)}(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}^{(j)}(t)$.

V.

$$\bar{\omega}(1) = \begin{vmatrix} T_1(1) & \ldots & T_{n-1}(1) & \overline{H}_n(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_1^{(n-2)}(1) & \ldots & T_{n-1}^{(n-2)}(1) & \overline{H}_n^{(n-2)}(1) \\ \overline{T}_1^{(n-1)}(1) & \ldots & \overline{T}_{n-1}^{(n-1)}(1) & \overline{\overline{H}}_n^{(n-1)}(1) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (4)$$

где $\overline{T}_i^{(n-1)}(t) \equiv T_i^{(n-1)}(t) + S_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\overline{\overline{H}}_n^{(n-1)}(t) \equiv \overline{H}_n^{(n-1)}(t) + \widetilde{H}_n(t)$, а функции $T_i^{(j)}(t)$, $\overline{H}_n^{(j)}(t), S_i(t), \widetilde{H}_n(t), i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, n-1}$ определенным образом выражаются через коэффициенты уравнения (3).

Рассмотрим функции $Q_i(t,\varepsilon), i = \overline{1,n}$, являющиеся решениями однородного интегродифференциального уравнения:

$$L_\varepsilon y = \int_a^1 [H_0(t,x) y(x,\varepsilon) + \ldots +$$
$$+ H_{n-1}(t,x) y^{(n-1)}(x,\varepsilon)] dx \quad (5)$$

с начальными условиями в точке $t = a$:

$$Q_i^{(j)}(a,\varepsilon)=\delta_{i-1,j}, \qquad j=\overline{0,n-1}, \qquad (6)$$

и функции $\Phi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ – решения того же однородного интегродифференциального уравнения (5), но с начальными условиями на правом конце рассматриваемого отрезка:

$$\Phi_i^{(j)}(1,\varepsilon)=\delta_{i-1,j}, \qquad j=\overline{0,n-1}. \qquad (7)$$

Решения $Q_i(t,\varepsilon),\Phi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ задач (5), (6) и (5), (7) назовем граничными функциями задачи (3), (2).

Лемма 1. Пусть выполнены условия I–IV. Тогда граничные функции $Q_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ на отрезке a Ә t Ә 1 существуют, единственны и представимы в виде

$$Q_i(t,\varepsilon)=K_i(t,a,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t K_n(t,s,\varepsilon)[h_i(s,a,\varepsilon)+$$
$$+\int_a^1 R_\varepsilon(s,p)h_i(p,a,\varepsilon)dp]ds,$$

где $K_i(t,s,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ – начальные функции (см., например, [1, 3]),

$$h_i(t,s,\varepsilon)=\int_s^1\sum_{j=0}^{n-1}H_j(t,x)K_i^{(j)}(x,s,\varepsilon)dx,\ i=\overline{1,n},$$

а $R_\varepsilon(t,s)$ – резольвента ядра

$$K_\varepsilon(t,s)=\frac{1}{\varepsilon}h_n(t,s,\varepsilon).$$

Лемма 2. Если выполнены условия I–V, то граничные функции $\Phi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ на отрезке [a,1] существуют, единственны и выражаются формулой

$$\Phi_i(t,\varepsilon)=\frac{\omega_i(t,1,\varepsilon)}{\omega(1,\varepsilon)}, \qquad i=\overline{1,n}, \qquad (8)$$

где

$$\omega(1,\varepsilon)=\begin{vmatrix} Q_1(1,\varepsilon) & Q_2(1,\varepsilon) & \ldots\ldots & Q_n(1,\varepsilon) \\ Q_1'(1,\varepsilon) & Q_2'(1,\varepsilon) & \ldots\ldots & Q_n'(1,\varepsilon) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_1^{(n-1)}(1,\varepsilon) & Q_2^{(n-1)}(1,\varepsilon) & \ldots\ldots & Q_n^{(n-1)}(1,\varepsilon)\end{vmatrix},$$

а $\omega_i(t,1,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ – определитель, получаемый из $\omega(1,\varepsilon)$ заменой его i-й строки строкой $Q_1(t,\varepsilon),\ldots,Q_n(t,\varepsilon)$.

Для определителя $\omega(1,\varepsilon)$ справедливо асимптотическое при e ® 0 представление

$$\omega(1,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{A_1(0)}\left[\overline{\omega}(1)+O(\varepsilon)\right],$$

где $\overline{\omega}(1)$ имеет вид (4) и в силу условия V отличен от нуля.

Лемма 3. Пусть выполнены условия I–V. Тогда для функций $\Phi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ при a Ә t Ә 1 справедливы следующие асимптотические при e ® 0 представления:

$$\Phi_i^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{\overline{\omega}_i^{(j)}(t,1)}{\overline{\omega}(1)}+O(\varepsilon),\ j=\overline{0,n-3},$$

$$\Phi_i^{(n-2)}(t,\varepsilon)=\frac{\overline{\omega}_i^{(n-2)}(t,1)}{\overline{\omega}(1)}-\frac{A_1(0)}{A_1(t)}\text{ө}$$

$$\text{ө}\frac{A_{i,n}}{\overline{\omega}(1)}\exp\left(\int_a^t\frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t\overline{\mu}(x)dx\right)+O(\varepsilon),$$

$$\Phi_i^{(n-1)}(t,\varepsilon)=\frac{\overline{\omega}_i^{(n-1)}(t,1)}{\overline{\omega}(1)}-\frac{A_1(0)}{\varepsilon}\text{ө}$$

$$\text{ө}\frac{A_{i,n}}{\overline{\omega}(1)}\exp\left(\int_a^t\frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t\overline{\mu}(x)dx\right)+ \qquad (9)$$

$$+O\left(\varepsilon+\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t\overline{\mu}(x)dx\right)\right), \qquad \overline{\mu}(t)=-A_1(t),$$

где $\overline{\omega}_i^{(j)}(t,1), i=\overline{1,n}, j=\overline{0,n-1}$ – определитель, получаемый из $\overline{\omega}(1)$ заменой его i-й строки строкой из элементов $T_1^{(j)}(t),\ldots,T_{n-1}^{(j)}(t),\overline{H}_n^{(j)}(t)$ для $j=\overline{0,n-2}$ и строкой $\overline{T}_1^{(n-1)}(t),\ldots,\overline{T}_{n-1}^{(n-1)}(t),$ $\overline{\overline{H}}_n^{(n-1)}(t)$ для j = n–1, а $A_{i,n}$ – алгебраическое дополнение i-го элемента последнего столбца определителя $\overline{\omega}(1)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия I–V. Тогда решение задачи (3), (2) на отрезке a Ә t Ә 1 существует, единственно и выражается формулой

$$y(t,\varepsilon)=(\alpha_0-P(1,\varepsilon))\Phi_1(t,\varepsilon)+\ldots+$$
$$+(\alpha_{n-1}-P^{(n-1)}(1,\varepsilon))\Phi_n(t,\varepsilon)+P(t,\varepsilon), \qquad (10)$$

где функции $\Phi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}$ являются решениями однородной интегродифференциальной задачи (5), (7) и представимы в виде (8), а функция $P(t,e)$ является решением неоднородного интегродифференциального уравнения (3) с нулевыми начальными условиями в точке $t = a$ и имеет вид

$$P(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t K_n(t,s,\varepsilon)[F(s)+\int_a^1 R_\varepsilon(s,p)F(p)dp]ds.$$

Определение. Будем говорить, что решение интегродифференциальной задачи (3), (2) обладает явлением начального скачка m-го порядка в точке $t = a$, если оно в этой точке имеет следующий порядок роста:

$$y^{(i)}(a,\varepsilon)=O(1),\quad i=\overline{0,m},\quad y^{(m+1)}(a,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$y^{(m+2)}(a,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),\ \dots\ ,$$

$$y^{(n-1)}(a,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1-m}}\right),\qquad \varepsilon\to 0.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия I–V. Тогда на отрезке [a,1] для решения $y(t,e)$ задачи (3), (2) справедливы следующие асимптотические при e ® 0 оценки:

$$\left|y^{(i)}(t,\varepsilon)\right|\le\frac{K}{\varpi(1)}(|\alpha_0|+\ldots+|\alpha_{n-1}|+\|F(t)\|),$$

$$i=\overline{0,n-3},$$

$$\left|y^{(n-2)}(t,\varepsilon)\right|\le$$

$$\le\frac{K}{\varpi(1)}\left(1+\exp\left(-\gamma\frac{t-a}{\varepsilon}\right)\right)(|\alpha_0|+\ldots+|\alpha_{n-1}|+\|F(t)\|),$$

$$\left|y^{(n-1)}(t,\varepsilon)\right|\le$$

$$\le\frac{K}{\varpi(1)}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\gamma\frac{t-a}{\varepsilon}\right)\right)(|\alpha_0|+\ldots+|\alpha_{n-1}|+\|F(t)\|),$$

где $\varpi(1)$ имеет вид (4), $K > 0$, $g > 0$ – некоторые постоянные, не зависящие от e.

Доказательство теоремы 2 следует из (9), (10).

Из теоремы 2 следует, что асимптотическое поведение решения интегродифференциальной задачи (3), (2) качественно отличается от поведения решений чисто дифференциальной задачи (1), (2), т.е. при e ® 0 не уходит на бесконечность на всем интервале 0 Ә t < 1, а только на 0 Ә $t < a$. На $a < t$ Ә 1, т.е. на том промежутке, где добавлены интегральные члены, решение интегродифференциальной задачи (3), (2) имеет конечный предел при e ® 0. При $a = 1$ интегродифференциальное уравнение (3) обращается в дифференциальное уравнение (1) и его решение, как известно, стремится к бесконечности на всем промежутке 0 Ә t < 1.

Из теоремы 2 также следует, что значения $y^{(i)}(a,\varepsilon), i=\overline{0,n-2}$ ограничены при e ® 0, а значение $y^{(n-1)}(a,\varepsilon)$ является бесконечно большим порядка $O(1/\varepsilon)$. Тогда согласно определению решение исходной интегродифференциальной задачи (3), (2) в точке $t = a$ обладает явлением начального скачка (n–2)-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Касымов К.А., Дауылбаев М.К.* Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. М.; Минск, 1999. Т. 35, № 6. С. 822-830.
2. *Дауылбаев М.К., Касымов К.А.* Задача Коши с начальными скачками для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. Новосибирск, 2003. 20 с. (Деп.в ВИНИТИ, 13.03.2003, № 449-В 2003).
3. *Касымов К.А., Дауылбаев М.К.* Сингулярно возмущенные линейные интегро-дифференциальные уравнения с начальными скачками любого порядка // Известия вузов. Математика. Казань, 2003. № 7(494). С. 70-74.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
5. *Иманалиев М.И.* Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. Фрунзе: Илим, 1972. 356 с.

Резюме

Бастапқы шарттары берілген кесіндінің оң жақ нүктесінде қойылған сингулярлы ауытқыған кез келген ретті сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеулердің шешімінің бар болуы, жалғыздығы және аналитикалық берілуі жайындағы теорема дәлелденген. Шешімнің кіші параметр бойынша бірқалыпты асимптотикалық бағалауы алынған.

Summary

In this paper we had proved theorem of existence, uniqueness and analytics formula for solution of integral-boundary value problem of singular perturbed linear integral differential equations of any order with initial condition in right point of given segment and we had determined equal dimension asymptotic evaluation with small parameter.

КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 5.03.07г.