Б. Т. ЖУМАГУЛОВ, Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОКЕАНА

Изучается итерационный метод для сеточного нелинейного уравнения океана. Доказывается, что решение итерационного метода сходится со скоростью геометрической прогрессии при малой правой части.

Пусть $h = 1/N$ и $\overline{\Omega} = \{x = (x_1, x_2, x_3), \quad 0 \le x_i \le 1, \quad i = 1,2,3\}$. $\overline{\Omega}_h = \{(ih, jh, kh), \quad 0 \le i, j, k \le N\}$ и $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$. V – линейное пространство вектор-функции, определенное на $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$, U – линейное пространство функций, определенное на Ω_h, и такое, что $\forall u \in U, \quad u_{x_3} = 0$. Если v_i определена на $\Omega_i \quad (i = 1,2)$, то через $\widetilde{v}_i$ будем обозначать функцию, определенную на $\overline{\Omega}_i$ и совпадающую с v_i на Ω_i. Если при этом $x \in \partial S_i \cap \partial S$, то положим $\widetilde{v}_i = 0$, если же $x \in \overline{\Omega}_i$ и $x \notin \overline{\Omega}$, то положим $\widetilde{v}_i(x) = -v_i(x')$, где x' – ближайший к x узел $\overline{\Omega}_i$. Теперь можно определить операторы $\Delta_h, \ \hat{\nabla}_h, \ d\hat{i}v_h$

$$\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{v_{1i+1, j+1/2, k+/12} - v_{1i, j+1/2, k+1/2}}{h} + \frac{v_{2i+1/2, j+1, k+/12} - v_{2i+1/2, j, k+1/2}}{h}\right)h \quad 0, \text{ в } \Omega_h,$$

$$\hat{\nabla}_h \xi \quad \left(\frac{\xi_{i+1/2, j-1/2} - \xi_{i-1/2, j+1/2}}{h}, \frac{\xi_{i-1/2, j-1/2} - \xi_{i-1/2, j-1/2}}{h}\right), \text{ в } \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Введем в V и U скалярное произведение по формулам

$$(v, u) = \sum_{x \in \Omega_1} h^3 v_1(x) u_1(x) + \sum_{x \in \Omega_2} h^3 v_2(x) u_2(x) + \sum_{x \in \Omega_3} h^3 v_3(x) u_3(x),$$

$$(P, q) = \sum_{\Omega_4} h^3 P(x) q(x), \quad \forall P_{x_3} = q_{x_3} = 0.$$

В нашем случае $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3 - \sum_{l=1}^{k} d\hat{i}v_h vh), \ v = (v_1, v_2)$. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что для $\hat{\nabla}_h, \ h\sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h$ выполнены условия

$$\left(h\sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h v, q\right) = -\left(\hat{\nabla}_h, h\sum_{k=1}^{N-1} v\right),$$

в классе $q_{x_3} = 0$.

Пусть D_h – обычный пятиточечный сеточный оператор Лапласа. Рассмотрим разностную схему второго порядка аппроксимации:

$$\mathrm{M}(\vec{v}, v) = \mu_0 v_{x_3\bar{x}_3} + \mu\Delta_h v - \hat{\nabla}_h \xi - l\times v + f, \text{ в } \Omega_1\times\Omega_2, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h v = 0, \; \xi_{x_3} = 0, \text{ в } \Omega_h, \tag{2}$$

$$v_1\Big|_{\partial S_1} = 0, \quad v_2\Big|_{\partial S_2} = 0. \tag{3}$$

где $\partial S_1, \partial S_2$ – границы сеточной области Ω_1, Ω_2.

Заметим, что при аппроксимации нелинейных слагаемых сохраняются условия

$$\left(\mathrm{M}(\vec{v}, v, v)\right) = 0. \tag{4}$$

Равенство (4) выполняется благодаря соленоидальности вектора функции $\vec{v} = (v_1, v_2, -\sum_{l=1}^{k} d\hat{i}vvh)$.

Известно, что в общем случае решения краевой задачи нелинейной стационарной модели единственно при малом $\|f\|$ или при большом μ_0, μ. Отсюда вытекает более жесткое требование на сходимость итерационного метода.

Для реализации на ЭВМ выпишем итерационный метод

$$\mathrm{B}v_{\bar{t}}^{n+1} + \mathrm{M}(\vec{v}^n, v^n) = \mu_0 v_{x_3\bar{x}_3}^{n+1} + \mu\Delta_h v^{n+1} - l\times(\alpha v^{n+1} + \beta v^n) - \hat{\nabla}_h \xi^{n+1} + f_h, \; \alpha+\beta = 1, \; \alpha, \beta \ge 0, \tag{5}$$

$$\aleph\, \tau\xi_{\bar{t}}^{n+1} + \sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h v^{n+1} h = 0, \tag{6}$$

$$v^0 = v_0, \quad \xi^0 = \xi_0, \quad v^{n+1}\Big|_{\partial S_1\times\partial S_2} = 0. \tag{7}$$

где t – итерационный параметр.

По аналогии с линейной задачей выпишем алгоритм итерационного метода. По данному (v^n, ξ^n) находим (v^{n+1}, ξ^{n+1}) по следующему алгоритму:

$$\mathrm{A}v_{\bar{t}}^{n+1} + \mathrm{M}(\vec{v}^n, v^n) = \mu_0 v_{x_3\bar{x}_3}^{n} + \mu\Delta_h v^{n} + \frac{1}{\aleph}\hat{\nabla}_h \sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h v_h^n h - l\times v^n -$$

$$-\frac{1}{\aleph}\hat{\nabla}_h \xi^n + f_h, \; \xi^{n+1} = \xi^n - \frac{1}{\aleph}\sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h v_h^{n+1} h. \tag{8}$$

Как и в линейной задаче, предполагаем, что A – положительный симметричный оператор и легко обратим на ЭВМ. Из первого уравнения (8) следует, что $v^{n+1} \in V$. Тогда, если $\xi^n \in U$, $\xi_{x_3}^n = 0$, то из второго уравнения (8) следует, что $\xi^{n+1} \in U$, $\xi_{x_3}^{n+1} = 0$. Таким образом, вычисления по формулам (8) каждой паре $\{v^n, \xi^n\} \in V\times U$ ставит в соответствие пару $\{v^{n+1}, \xi^{n+1}\} \in V\times U$.

Обозначим через $\mathrm{B} = \mathrm{A} + \tau(\mu_0\Lambda_{33} + \mu\Delta_h + \frac{1}{\aleph}\hat{\nabla}_h \sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h h - \alpha l\times)$. Тогда получим итерационный метод (5)–(7). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{A} = \mathrm{A}^* > 0$, $\left\|v^0\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \tau\left\|\xi^0\right\|^2 \le C < \infty$, $\left\|f_h\right\|_{(-1)} \le C < \infty, \mathrm{B} > 0$. *Тогда для любого* $\tau < \bar{\tau}$, $\bar{\tau}$ *– зависит от* $\aleph_i, h$, *справедлива оценка*

$$\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \tau\left\|\xi^{n+1}\right\|^2 \le N_7 < \infty, \tag{9}$$

где N_7 *– некоторая положительная постоянная, не зависящяая от* h, τ.

Доказательство. В силу условий теоремы и определения оператора B следует, что существует

$$\aleph_2\left\|v\right\|_1 \le \left\|v\right\|_{\mathrm{B}} \le \aleph_1\left\|v\right\|_1, \quad \aleph_0\left\|v\right\|_{\mathrm{B}}^2 \ge \left\|v\right\|^2, \tag{10}$$

$$-\gamma_1(\mu_0\Lambda_{33} + \mu\Delta_h) \le \mathrm{A} \le -\gamma_2(\mu_0\Lambda_{33} + \mu\Delta_h).$$

При этом постоянные $\aleph_i$ не зависят от $\tau \le \bar{\tau}$ и от $\aleph$. В зависимости от h здесь присутствует неявная форма через γ_1, γ_2, которая зависима от выбора А.

Предположим, что оценка (9) выполнена в первом слое. Найдем условия, которые должны удовлетворять постоянной N_0, параметру τ, чтобы оценка (9) была также верна и для $\left\{v^{n+1}, \xi^{n+1}\right\}$. Умножим (5) на $2\tau h^3 v^{n+1}$, (6) на $2\tau h^3 \xi^{n+1}$ и, суммируя в точках $\Omega_1 \times \Omega_2$ и Ω_h, складывая, в результате получаем

$$\begin{gathered}\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 - \left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2 + 2\tau\left\|v^{n+1}\right\|_1^2 + \aleph\tau\left(\left\|\xi^{n+1}\right\|^2 - \left\|\xi^n\right\|^2\right) + \left\|(v^{n+1} - v^n)\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \\ + \aleph\tau^3\left\|\xi_{\bar{t}}^{n+1}\right\|^2 + 2\tau(\mathrm{M}v^n, v^{n+1}) - 2\tau(f_h, v^{n+1}) - \beta(l \times v^n, v^{n+1})2\tau = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Преобразуем скалярное произведение нелинейных слагаемых

$$\left(\mathrm{M}(\vec{v}^{\,n}, \hat{v}^n), v^{n+1}\right) \quad \left(\mathrm{M}(\vec{v}^{\,n}, v^n - v^{n+1}), v^{n+1}\right) + \left(\mathrm{M}(\vec{v}^{\,n}, v^{n+1}), v^{n+1}\right) \quad -\tau\left(\mathrm{M}(\vec{v}^{\,n}, \hat{v}_{\bar{t}}^{n+1}), v^{n+1}\right).$$

Оцениваем слагаемые $\left(\mathrm{M}(\vec{v}^{\,n}, v_{\bar{t}}^{n+1}), v^{n+1}\right)$, используя теорему вложения [1]

$$\left|\sum_{i,j=1}^{2}\left((v_j^n v_{ix_j\bar{t}}^{n+1}), v_i^{n+1}\right)\right| = \sum_{i=1}^{2}\left\|v_{ix\bar{t}}^{n+1}\right\|\left\|v^n\right\|_{L_4}\left\|v^{n+1}\right\|_{L_4} \le C_0\left\|v_{\bar{t}}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}. \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\left|\left(\sum_{l=1}^{k}(v_{1\bar{x}_1}^n + v_{2\bar{x}_2}^n)hv_{x_3\bar{t}}^{n+1}v^{n+1}\right)\right| \le \left(\sum_{k=1}^{N-1}\left(\left|v_{1\bar{x}_1}^n\right| + \left|v_{2\bar{x}_2}^n\right|\right)h, \left|v_{x_3\bar{t}}^{n+1}\right|\left|v^{n+1}\right|\right) \le \\ \le C_1\sum_{l=1}^{N-1}\left\|\hat{\nabla}_h v^n\right\|_{L_4((0,1)\times(0,1))} h\left\|v_{\bar{t}}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}} \le \\ \le C_2\sum_{l=1}^{N}\left(\left\|\hat{\nabla}_h v^n\right\|_{L_2((0,1)\times(0,1))}^{1/2}\left\|\Delta_h v^n\right\|_{L_2((0,1)\times(0,1))}^{1/2}\right)h\left\|v_{\bar{t}}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}} \le \\ \le \frac{C_3}{h^{1/2}}\sum_{l=1}^{N}\left(\left\|\hat{\nabla}_h v^n\right\|h\right)\left\|v_{\bar{t}}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}} \le \frac{C_4}{h^{1/2}}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}\left\|v_{\bar{t}}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}.\end{gathered} \tag{13}$$

Отсюда $\left(\mathrm{M}v_{\bar{t}}^{n+1}, v^{n+1}\right)$ оценивается сверху

$$\tau^2\left|\left(\mathrm{M}(\vec{v}^{\,n}, v_{\bar{t}}^{n+1}), v^{n+1}\right)\right| \le \frac{\tau^2}{8}\left\|v_{\bar{t}}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \frac{N_0\tau^2}{h}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2. \tag{14}$$

Слагаемую $(l \times v^n, v^{n+1})$ оцениваем также, как

$$\tau\beta\left|(l \times v^n, v^{n+1})\right| \le \frac{\tau^2}{8}\left\|v_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}} + \tau^2\beta N_1\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2, \tag{15}$$

где N_0, N_1 – положительные постоянные, зависящие от $\aleph_i$, $i = 0,1,2$. Учитывая оценки (14), (15), из (12) получаем

$$\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 - \left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \frac{\tau^2}{2}\left\|v_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \tau(1 - \frac{N_0\tau}{h}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2 - \tau^2\beta \mathrm{N}_1)\left\|v^{n+1}\right\|_1^2 +$$
$$+ \aleph\tau(\left\|\xi^{n+1}\right\|^2 - \left\|\xi^n\right\|^2) + \aleph\tau^3\left\|\xi_{\bar t}^{n+1}\right\|^2 \le \tau\left\|f_h\right\|_{(-1)}^2. \tag{16}$$

Оценим норму $\left\|\xi^{n+1}\right\|$ из первого уравнения (5). Для любой $\varphi \in V$ имеем

$$\left|(\hat\nabla_h\xi^{n+1}, \varphi)\right| \le \left|(\mathrm{B}v_{\bar t}^{n+1}, \varphi)\right| + \left|(\mu_0 v_{x_3\bar x_3}^{n+1} + \mu v\Delta_h v^{n+1}, \varphi)\right| +$$
$$+\left|(\mathrm{M}(\vec v^{\,n}, v_{\bar t}^{n+1}), \varphi)\tau\right| + \left|(\mathrm{M}(\vec v^{\,n}, v^{n+1}), \varphi)\right| + (\tau\alpha\left\|v_{\bar t}^{n+1}\right\|_B + \left\|v^{n+1}\right\|_1 + \left\|f_h\right\|_{(-1)})\left\|\varphi\right\|_1 \le$$
$$\le (\aleph_1\left\|v_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}} + \left\|v^{n+1}\right\|_1)\left\|\varphi\right\|_1 + \left|(\mathrm{M}(\vec v^{\,n}, v^{n+1}), \varphi)\right| + \tag{17}$$
$$+\tau\left|(\mathrm{M}(\vec v^{\,n}, v_{\bar t}^{n+1}), \varphi)\right| + (\left\|f_h\right\|_{(-1)} + \frac{\tau\beta}{\aleph_2}\left\|v_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}} + \left\|v^{n+1}\right\|_1)\left\|\varphi\right\|_1.$$

Оценим нелинейные слагаемые

$$\left|\left(\sum_{l=1}^{k}(v_{1\bar x_1}^n + v_{2\bar x_2}^n)hv_{x_3}^{n+1}, \varphi\right)\right| \le \left(\sum_{l=1}^{k}(\left|v_{1\bar x_1}^n\right| + \left|v_{2\bar x_2}^n\right|)h, \left|v_{x_3}^{n+1}\right|\left|\varphi\right|\right) \le$$
$$\le N_2\sum_{l=1}^{k}\left\|\hat\nabla v^n\right\|_{L_4((0,1)\times(0,1))} h\left\|v^{n+1}\right\|_1\left\|\varphi\right\|_1 \le \frac{N_3}{\sqrt{h}}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}\left\|v^{n+1}\right\|_1\left\|\varphi\right\|_1,$$

Слагаемую $\left|(\mathrm{M}(\vec v^{\,n}, v_{\bar t}^{n+1}), \varphi)\right|\tau$ оцениваем так же, как в (13)

$$\left|(\mathrm{M}(\vec v^{\,n}, v_{\bar t}^{n+1}), \varphi)\right|\tau \le \frac{\tau C_5}{h^{1/2}}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}\left\|v_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}\left\|\varphi\right\|_1.$$

Вычислим в (17)

$$N_4\left\|\xi^{n+1}\right\| \le \sup_{\left\|\varphi\right\|_1=1}\left|(\hat\nabla_h\xi^{n+1}, \varphi)\right| \le \aleph_1\left\|v_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}} + \left\|v^{n+1}\right\|_1 + \frac{N_5}{\sqrt{h}}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}\left\|v^{n+1}\right\|_1 +$$
$$+\aleph_2^{-1}\tau\beta\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}} + \sqrt{C_\Omega}\left\|v^{n+1}\right\|_1 + \left\|f\right\|_{(-1)} + \frac{\tau C_5}{h^{1/2}}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}\left\|v_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}.$$

Отсюда следует

$$\tau^2\left\|\xi^{n+1}\right\|^2 \le N_6\tau^2\Bigg(\aleph_1^2\left\|v_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \left\|v^{n+1}\right\|_1^2 + \frac{1}{h}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2\left\|v^{n+1}\right\|_1^2 +$$
$$+ (\aleph_2^{-1}\tau\beta)^2\left\|v_{\bar t}^{n+1}\right\|^2 + \left\|f\right\|_{(-1)}^2 + \frac{\tau^2}{h}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2\left\|v_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2\Bigg). \tag{18}$$

Умножим (18) на $\lambda_0 > 0$ и сложим с (16)

$$\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 - \left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \tau^2\left(\frac{1}{2} - N_6\lambda_0(\aleph_2^{-1}\tau\beta)^2 - \lambda_0 N_6 \aleph_1^2 - \frac{\tau^2}{h}N_6\lambda_0\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2\right)\left\|v_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 +$$
$$+\tau\left(1 - \frac{N_6\tau}{h}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2 - N_6\tau(1+\frac{1}{h})\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2\right)\left\|v^{n+1}\right\|_1^2 + \tag{19}$$
$$+\tau^2(1+\lambda_0\tau)\left\|\xi^{n+1}\right\|^2 \le \left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \tau\left\|\xi^n\right\|^2 + \tau^2\left\|f\right\|_{(-1)}^2 + \tau\left\|f\right\|_{(-1)}^2 .$$

Далее τ, λ_0 выбираем так, чтобы выполнилось соотношение

$$1 - \frac{N_6\tau}{h}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2 - N_6\tau(1+\frac{\lambda_0}{h})\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2 \ge \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2} - N_6\lambda_0(\aleph_2^{-1}\tau\beta)^2 - \lambda_0 N_6\aleph_1^2 - \frac{\tau^2}{h}N_6\lambda_0\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2 \ge 0. \tag{20}$$

Тогда перепишем (19) следующим образом:

$$\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \frac{\tau}{2}\left\|v^{n+1}\right\|^2 + \tau(1+\lambda_0\tau)\left\|\xi^{n+1}\right\|^2 \le \left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \tau\left\|\xi^n\right\|^2 + \lambda_0\tau^2\left\|f\right\|_{(-1)}^2 + \tau\left\|f\right\|_{(-1)}^2 . \tag{21}$$

С учетом (10) преобразуем (21)

$$(1+\frac{\tau}{4\aleph_1^2})\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \frac{\tau}{4\aleph_1^2}\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \tau(1+\lambda_0\tau)\left\|\xi^{n+1}\right\|^2 \le \left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \tau\left\|\xi^n\right\|^2 + \lambda_0\tau^2\left\|f\right\|_{(-1)}^2 + \tau\left\|f\right\|_{(-1)}^2 . \tag{22}$$

Рассуждая так же, как в линейном случае, при выводе получим

$$\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \tau\left\|\xi^{n+1}\right\|^2 \le q\left(\left\|v^n\right\|^2 + \tau\left\|\xi^n\right\|^2\right) + \lambda_0\tau^2\left\|f_h\right\|_{(-1)}^2 + \left\|f_h\right\|_{(-1)}^2\tau, \quad q<1. \tag{23}$$

Итак, нами доказано следующее

$$\left\|v^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \tau\left\|\xi^{n+1}\right\|^2 \le N_7 < \infty,$$

при $\tau < \bar\tau$, $\bar\tau$ является корнем уравнений.

$$1 - \frac{N_6}{h}\bar\tau N_7 - N_6\bar\tau(1+\frac{1}{h})N_7 = \frac{1}{2}, \tag{24}$$

λ_0 – удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2} - N_6\lambda_0(\aleph_2^{-1}\tau\beta)^2 - \lambda_0 N_6\aleph_1^2 - \frac{\tau^2}{h}N_6\lambda_0 N_7 \ge 0.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Вычислим оценки скорости сходимости итерационного метода (5)–(7). Выпишем уравнение для $\vec\omega^n, \pi^n$

$$\mathrm{B}\omega_{\bar t}^{n+1} + \mathrm{M}(\vec v^n, v^n) - \mathrm{M}(\vec v, v) \quad \mu_0\omega_{x_3\bar x}^{n+1} + \mu\Delta_h\omega^{n+1} - l\times(\alpha\omega^{n+1}\times\beta\omega^n) - \hat\nabla_h\pi^{n+1}, \tag{25}$$

$$\aleph\,\tau\pi_{\bar t}^{n+1} + \sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h\omega^{n+1}h = 0. \tag{26}$$

Умножим (25), (26) на $2\tau\omega^{n+1}h^3$, $2\tau\pi^{n+1}h^3$, суммируем по сеткам области и преобразуем нелинейные слагаемые следующем образом:

$$2\tau\Big(\mathrm{M}(\tilde{v}^n, v^n) - \mathrm{M}(\tilde{v}, v), \omega^{n+1}\Big) = 2\tau\Big(\mathrm{M}(\tilde{v}^n, v^n) - \mathrm{M}(v^n, v) + \\ + \mathrm{M}(\tilde{v}^n, v) - \mathrm{M}(\tilde{v}, v), \omega^{n+1}\Big) = 2\tau\Big(\mathrm{M}(\tilde{v}^n, \omega^n) + \mathrm{M}(\tilde{\omega}^n, v), \omega^{n+1}\Big), \tag{27}$$

$$2\tau\Big(\mathrm{M}(\tilde{v}^n, \omega^n), \omega^{n+1}\Big) = 2\tau\Big[\Big(\mathrm{M}(\tilde{v}^n, \omega^n), \omega^{n+1} - \omega^n) + (\mathrm{M}(v^n, \omega^n), \omega^n\Big) = \\ = 2\tau^2(\mathrm{M}(\tilde{v}^n, \omega^n), \omega_{\bar t}^{n+1}) = 2\tau^3(\mathrm{M}(\tilde{v}, \frac{\omega^n - \omega^{n+1}}{\tau}), \omega_{\bar t}^{n+1}) + 2\tau^2(\mathrm{M}(\tilde{v}^n, \omega^{n+1}), \omega_{\bar t}^{n+1}) = \\ = 2\tau^2\left(\mathrm{M}(\tilde{v}^n, \omega^{n+1}), \omega_{\bar t}^{n+1}) \le \frac{\tau^2}{8}\left\|\omega_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 + N_8\frac{\tau^2}{h}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2\left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2\right), \tag{28}$$

$$2\tau\left|(\mathrm{M}(\omega^n, v), \omega^{n+1})\right| = 2\tau\left|((\mathrm{M}(\tilde{\omega}^n - \tilde{\omega}^{n+1}, v), \omega^{n+1}) + 2\tau(\mathrm{M}(\tilde{\omega}^{n+1}, v), \omega^{n+1})\right| \le \\ \le N_9\tau^2\left\|\omega_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}\left\|v_x\right\|_{L_4(\Omega_1\times\Omega_2)}\left\|\omega^{n+1}\right\|_1 + N_{10}\tau\left\|v_x\right\|_{L_4(\Omega_1\times\Omega_2)}\left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2. \tag{29}$$

Рассуждая также, как в линейном случае, имеем

$$\left\|\omega^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 - \left\|\omega^n\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \frac{\tau^2}{2}\left\|\omega_{\bar t}^{n+1}\right\|^2 + \tau(1 - N_{11}\frac{\tau}{h}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2 - \tau N_{12}\left\|v_x\right\|_{L_4}^2 - N_{10}\left\|v_x\right\|_{L_4(\Omega_1\times\Omega_2)}^2) \\ \left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2 + \aleph\,\tau(\left\|\pi^{n+1}\right\|^2 - \left\|\pi^n\right\|^2) + \aleph\,\tau^2\left\|\pi_{\bar t}^{n+1}\right\|^2 \le 0. \tag{30}$$

Оценим нелинейные слагаемые в (25) в негативной форме

$$J_0 = \sup_{\|\varphi\|_1=1}(\mathrm{M}(\tilde{v}^n, \omega^n), \varphi) \le \sup_{\|\varphi\|_1=1}(\left|\mathrm{M}(\tilde{v}^n, \omega_{\bar t}^{n+1}), \varphi)\right|\tau + \left|\mathrm{M}(\tilde{v}^n, \omega^{n+1}), \varphi)\right|) \le \\ \le N_{13}(\frac{\tau}{\sqrt{h}}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}\left\|\omega_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}} + \sup_{\|\varphi\|_1=1}\left|(\mathrm{M}(\tilde{\omega}^n, \omega^{n+1} + \mathrm{M}(\tilde{v}^n, \omega^{n+1}), \varphi)\right|. \tag{31}$$

Отсюда следует, что

$$J_0 = N_{15}\left[\frac{\tau}{\sqrt{h}}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}\left\|\omega_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}} + (\left\|v_x\right\|_{L_4(\Omega)} + \frac{\tau}{\sqrt{h}}\left\|\omega^n\right\|_{\mathrm{B}})\left\|\omega^{n+1}\right\|_1\right].$$

В силу уравнения (25), используя (31), оцениваем слагаемые $\tau^2\left\|\pi^{n+1}\right\|^2$ как в линейном случае:

$$\tau^2\left\|\pi^{n+1}\right\|^2 \le N_{16}(1 + \frac{\tau^2}{h}(\left\|v_x\right\|_{L_4(\Omega_1\times\Omega_2)} + 1 + \left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}})^2\left\|\omega_{\bar t}^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2 + \\ + \frac{\tau^2}{h}(1 + \left\|v_x\right\|_{L_4(\Omega_1\times\Omega_2)} + \left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}})^2\left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2. \tag{32}$$

Умножим (32) на λ_0 и сложим с (29), отбрасывая положительные слагаемые правой части, и потребуем выполнение неравенства

$$\frac{1}{2} - \lambda_0 N_{16}(1 - \frac{\tau^2}{h}(\left\|v_x\right\|_{L_4(\Omega_1\times\Omega_2)} + 1 + \left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}})^2) \ge \alpha_0, \tag{33}$$

$$1-N_{11}\frac{\tau}{h}\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}}^2-\tau N_{12}\left\|v_x\right\|_{L_4(\Omega_1\times\Omega_2)}^2-N_{10}\left\|v_x\right\|_{L_4(\Omega_1\times\Omega_2)}^2-$$

$$-\lambda_0\frac{\tau^2}{h}N_{16}(1+\left\|v_x\right\|_{L_4(\Omega_1\times\Omega_2)}+\left\|v^n\right\|_{\mathrm{B}})^2\geq\alpha_1. \tag{34}$$

В результате получим

$$\left\|\omega^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2+\tau\alpha_1\left\|\omega^{n+1}\right\|_1+\tau(\aleph+\lambda_0\tau)\left\|\pi^{n+1}\right\|^2\leq\left\|\omega^n\right\|_{\mathrm{B}}^2+\tau\aleph\left\|\pi^n\right\|^2. \tag{35}$$

Условия (33) можно выполнить при малом $\tau<\tau_0$ и достаточно малом λ_0, а из (34) кроме малости дополнительно потребуем малости нормы $\left\|v_x\right\|_{L_4(\Omega_1\times\Omega_2)}$. Эти условия означают достаточные условия единственности решении задачи (1)–(3).

Из (35) следует, что существует $q<1$ и справедливо неравенство

$$\left\|\omega^{n+1}\right\|_{\mathrm{B}}^2+\beta_2\tau\left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2+\tau\left\|\pi^{n+1}\right\|^2\leq q(\left\|\omega^n\right\|_{\mathrm{B}}^2+\tau\left\|\pi_n\right\|^2)\leq N_{17}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 5.3 и* $\left\|v_x\right\|_{L_4(\Omega_1\times\Omega_2)}$ *достаточно мало. Тогда решение итерационного метода (5)–(7) сходится со скоростью геометрической прогрессии при* $\tau<\bar\tau$, *где* $\bar\tau$ *является решением уравнения*

$$1-N_{11}\frac{\bar\tau^2}{h}N_{17}-\bar\tau N_{12}\left\|v_x\right\|_{L_4(\Omega_1\times\Omega_2)}-\lambda_0\frac{(\bar\tau)^2}{h}N_{16}(1+\left\|v_x\right\|_{L_4}+\sqrt{N_{17}})^2=0.$$

Разностные методы нестационарной модели океана. Рассмотрим в следующей постановке задачу динамики бараклинного океана в области W

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(\vec v\nabla)v+l\times v=\mu_0\frac{\partial^2 v}{\partial x_3}+\mu\Delta v-g\hat\nabla\xi-\frac{g}{\rho_0}\int_0^{x_3}\hat\nabla\rho dx_3, \tag{36}$$

$$\aleph\frac{\partial\xi}{\partial t}+\int_0^H \hat{div} v dx_3=0,\ v=(v_1,v_2),\ \vec v=(v_1,v_2-\int_0^{x_3}\hat{div} v dx_3), \tag{37}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\vec v\nabla)\rho+\Gamma v_3=\aleph_0\frac{\partial^2\rho}{\partial x_3^3}+\aleph\Delta\rho. \tag{38}$$

Системы уравнений (36)–(38) решим со следующими начальными и граничными условиями:

$$v\big|_{t=0}=v_0(x), \tag{39}$$

$$\xi\big|_{t=0}=\xi_0(x_1,x_2). \tag{40}$$

На поверхности океана

$$\frac{\partial v}{\partial x_3}=0,\ v_3=-\int_0^H \hat{div} v dx_3=\frac{\partial\xi}{\partial t},\ \rho=\rho_0, \tag{41}$$

на боковой поверхности

$$\vec v=0,\quad \frac{\partial\rho}{\partial n}=0, \tag{42}$$

на дне

$$v = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, \tag{43}$$

где n – нормаль к боковой поверхности и поверхности дна. В случае $\aleph = 0$ условия (40) снимаются. В принципе условия (41)–(43) можно заменить и другими граничными условиями. Для построения разностных схем системы (36), (37) для простоты предположим, что область $\Omega = (0,1)\times(0,1)\times(0,1)$

$$v_{\bar t}^{n+1} + \mathrm{M}(\vec{v}^{\,n}, v^n) = \mu_0 v^{n+1}_{x_3\bar x_3} + \mu\Delta_h v^{n+1} - l\times(\alpha v^n + \beta v^{n+1}) -$$

$$-g\hat\nabla_h \xi^{n+1} - \frac{g}{\rho_0}\hat\nabla_h \sum_{l=0}^{k} \rho^n h \ \text{ в } \ \Omega_1\times\Omega_2, \tag{44}$$

$$\aleph\, \xi_{\bar t}^{n+1} + \sum_{k=0}^{N} \hat{div}\, vh = 0, \ \text{ в } \ \Omega_h, \tag{45}$$

$$\rho_{\bar t}^{n+1} + \mathrm{M}(\vec{v}^{\,n}\rho^n) - \Gamma\Big(\sum_{k=0}^{N} \hat{div}\, vh\Big) = \aleph_0 \rho^{n+1}_{x_3\bar x_3} + \aleph\Delta_h \rho^{n+1}, \ \text{ в } \ \Omega_1 \ \text{ или } \ \Omega_2, \tag{46}$$

(44)–(46) решаем с условиями (41)–(43):

где $v_{\bar t}^{n+1} = \dfrac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t}, \quad \xi_{\bar t}^{n+1} = \dfrac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t}, \quad \rho_{\bar t}^{n+1} = \dfrac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочергин В.П.* Теория и метод расчета океанических течений. Новосибирск, 1978. 124 с.
2. *Вабищевич П.Н.* Метод фиктивных областей для задачи математической физики. М., 1991. 156 с.
3. *Смагулов Ш.* Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнений Навье-Стокса. Новосибирск, 1976.
4. *Коновалов А.Н.* // Численные методы механики сплошной среды. 1972. Т. 3. № 5.
5. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, 1983. 305 с.

Резюме

Тор көзді сызықты емес океан теңдеуінің итерациалық әдісіні зерттелінген. Итерациалық әдістің шешімінің оң жағы өте аз шама болғанда геометриялық прогрессия жылдамдығымен жинақталатындығы делелденген.

Summary

In this work the iterative method for the net non-linear equation of ocean is studied. It is being proved that solutions to an iterative method converge with speed of a geometrical progression at a small right part.

Поступила 02.01.07г.