УДК 539.3

Н. И. МАРТЫНОВ

ПРИВЕДЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ СТАТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УПРУГОЙ СРЕДЫ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ОБОБЩЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ВЕКТОРА

Краевые задачи статики неинородных анизотропных сред сводятся к задаче Римана–Гильберта обобщенного аналитического вектора.

В работе [1] основные краевые задачи статики неоднородной изотропной упругой среды на плоскости приведены к краевым задачам обобщенного аналитического вектора. Такой подход позволяет обобщить метод Н. И. Мусхелишвили на неоднородные среды, ослабить требования на гладкость упругих параметров, записать общее решение и многое другое. Для решения конкретных задач применим метод граничных интегральных уравнений (МГИУ). В настоящей статье обобщаются результаты [1] на анизотропные неоднородные упругие среды.

В декартовой системе координат $0x_1x_2$ в поле массовых сил $\vec{f}=\left(f_1,f_2\right)$ рассмотрим равновесие анизотропного неоднородного линейно-упругого тела, занимающего область D с границей Γ. Уравнения равновесия и закон Гука имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11,1}+\sigma_{12.2}+f_1=0,\\ \sigma_{21,1}+\sigma_{22,2}+f_2=0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{11}=u_{1,1}=\beta_{11}\sigma_{11}+\beta_{12}\sigma_{22}+\beta_{16}\sigma_{12};\varepsilon_{22}=u_{2,2}=\beta_{12}\sigma_{11}+\beta_{22}\sigma_{22}+\beta_{26}\sigma_{12};\\ &2\varepsilon_{12}=\left(u_{1,2}+u_{2,1}\right)=\beta_{16}\sigma_{11}+\beta_{26}\sigma_{22}+\beta_{66}\sigma_{12},\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $\sigma_{i,j}\left(i,j=1{,}2\right)$ – компоненты тензора напряжений, $\vec{u}=\left(u_1,u_2\right)$ – вектор перемещений, $\beta_{ij}=\beta_{ij}\left(x_1,x_2\right),(i,j=1,\,2,\,6)$ – приведенные упругие «постоянные», зависящие от координат x_1,x_2. Они связаны с упругими модулями соотношениями[2]:

$$\beta_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}},\left(i,j=1{,}2{,}6\right), \tag{2а}$$

а компонента тензора напряжений σ_{33} определяется как

$$\sigma_{33}=-(a_{13}\sigma_{11}+a_{23}\sigma_{22}+a_{36}\sigma_{12})/a_{33}. \tag{2б}$$

Введем «след» от объемных сил:

$$\theta_1=-\int_0^{x_1}f_1\left(x_1,x_2\right)dx_1,\quad \theta_2=-\int_0^{x_2}f_2\left(x_1,x_2\right)dx_2 \tag{3}$$

и функцию напряжений

$$U\left(x_1,x_2\right):\sigma_{11}=U_{,22}+\theta_1,\quad \sigma_{22}\quad U_{,11}+\theta_2,\quad \sigma_{12}\quad -U_{12}. \tag{4}$$

Тогда система уравнений (1) удовлетворяется автоматически. Перейдем к комплексным переменным с помощью соотношений:

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} \equiv s = x_1 - ix_2, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \tag{5}$$

где i – мнимая единица ($i^2 = -1$). Введем комплексное перемещение W, среднее напряжение s и комплексное сдвиговое напряжение t:

$$\left.\begin{aligned} &W = u_1 + iu_2, \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = (\lambda + \mu)(u_{1,1} + u_{2,2}), \\ &\tau = (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + 2i\sigma_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

В новых переменных уравнения равновесия в напряжениях (1) и закон Гука примут вид:

$$\left(\frac{\sigma}{2} - F_2^{\,0}\right)_{,Z} - \left(\frac{\tau}{4} + F_1^{\,0}\right)_{,S} = 0, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{W}_Z = -bU_{ZZ} - dU_{SS} - cU_{ZS} + F_1, W_S = -bU_{SS} - \bar{d}U_{ZZ} - \bar{c}U_{ZS} + \overline{F}_1, \\ &(W_Z + \overline{W}_S) = \bar{c}U_{ZZ} + cU_{SS} + 4aU_{ZS} - F_0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &F_1^{\,0} = \frac{1}{4}(\theta_2 - \theta_1), \quad F_2^{\,0} = \frac{1}{4}(\theta_1 + \theta_2), \quad a = \frac{1}{2}(\beta_{11} + \beta_{22} + 2\beta_{12}), \\ &b = \frac{1}{2}(\beta_{11} + \beta_{22} - 2\beta_{12} + \beta_{66}), c = (\beta_{22} - \beta_{11}) + i(\beta_{16} + \beta_{26}), \\ &d = \frac{1}{2}(\beta_{11} + \beta_{22} - 2\beta_{12} - \beta_{66}) + i(\beta_{26} - \beta_{16}), F_0 = (\beta_{11} + \beta_{12})\theta_1 + (\beta_{22} + \beta_{12})\theta_2, \\ &F_1 = \frac{1}{2}\{((\beta_{12} - \beta_{11}) + i\beta_{16})\theta_1 + ((\beta_{22} - \beta_{12}) + i\beta_{26})\theta_2\}. \end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

Исключая из (8) перемещения, получаем уравнение совместности деформаций в «терминах» функции напряжений:

$$\begin{aligned} &(\bar{c}U_{ZZ} + cU_{SS} + 4aU_{ZS})_{ZS} + (bU_{ZZ} + dU_{SS} + cU_{ZS})_{SS} + \\ &+ (bU_{SS} + \bar{d}U_{ZZ} + \bar{c}U_{ZS})_{ZZ} = (F_{0ZS} + F_{1SS} + \overline{F}_{1ZZ}). \end{aligned} \tag{9}$$

Исключая из (8) функцию напряжений, получаем уравнение равновесия в перемещениях:

$$(\alpha_{11}(W_Z + \overline{W}_S) + \alpha_{12}W_S + \bar{\alpha}_{12}\overline{W}_Z + F_1^*)_S - (\alpha_{12}(W_Z + \overline{W}_S) + \alpha_{13}W_S + \alpha_{14}\overline{W}_Z + F_2^*)_Z = 0, \tag{10}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{11} = (|d|^2 - b^2)/\Delta, \alpha_{12} = (cb - d\bar{c})/\Delta, \alpha_{13} = (4ad - c^2)/\Delta, \alpha_{14} = (|c|^2 - 4ab)/\Delta, \\ &F_1^* = \alpha_{11}F_0 - \alpha_{12}\overline{F}_1 - \bar{\alpha}_{12}F_1, F_2^* = \alpha_{12}F_0 - \alpha_{13}\overline{F}_1 - \alpha_{14}F_1, \Delta = 2b(|c|^2 - 2ab) + 4a|d|^2 - (\bar{d}c^2 + d\bar{c}^2). \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

Таким образом, если задача рассматривается в напряжениях, то используется уравнение совместности деформаций (9), если в перемещениях, то уравнение равновесия (10).

Обратимся к соотношениям (8), которые, как нетрудно видеть, являются интегралами уравнений (9), (10). Действительно, если задача рассматривается в напряжениях, то, выразив вторые производные от U через комплексные «градиенты» от W из (8) и подставив в (9), получим тождество. Нетрудно доказать и обратное. Если задача рассматривается в перемещениях, то, выразив «градиенты» перемещений через функцию напряжений и подставив в (10), получим тождество. Обратно, из (10) следуют соотношения (8), где U – произвольная действительная функция. Следовательно, комплексный закон Гука, который связывает между собой силовые и деформационные характеристики упругого тела, является интегралом уравнений (9), (10). Поэтому на соотношения (8) можно посмотреть как на систему уравнений первого порядка относительно $W, \overline{W}, U_S, U_Z$ с дополнительным условием $U_{SZ} = U_{ZS}$.

Систему уравнений (8) приведем к каноническому (по И. Г. Петровскому) виду. Сначала рассмотрим неоднородное изотропное тело. Тогда

$$\beta_{16} = \beta_{26} = c = d = 0,$$

$$\beta_{66} = b = \frac{1}{\mu}, \beta_{11} = \beta_{22} = \frac{1-\nu^2}{E}, \beta_{12} = -\frac{\nu(1+\nu)}{E}, a = \frac{1}{2(\lambda+\mu)}, F_0 = \frac{(\theta_1+\theta_2)}{2(\lambda+\mu)}, F_1 = \frac{(\theta_2-\theta_1)}{4\mu},$$

(11)

где н – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, л,м – параметры Ламе. С помощью замены переменных [1]:

$$\left.\begin{aligned} W &= A_0 u - B_0 \overline{v}, \quad \overline{W} = A_0 \overline{u} - B_0 v, \\ U_S &= \frac{m}{2}\left(u + \overline{v}\right), \quad U_z = \frac{m}{2}\left(\overline{u} + v\right), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где

$$\delta = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}, \; m = \sqrt{\mu\delta}, \; B_0 = \frac{m}{2\mu}, \; A_0 = \frac{1}{2\mu} + \frac{m}{2(\lambda+\mu)}, \tag{12a}$$

систему уравнений (8) приведем к виду:

$$\vec{\chi}_S - Q\vec{\chi}_z = A\vec{\chi} + B\overline{\vec{\chi}} + \vec{F}_*$$

(13)

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\chi} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \; \vec{F}_* = \begin{pmatrix} F_{*1} \\ F_{*2} \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \left(a_{ij}\right), B = \left(b_{ij}\right), (i,j = 1,2), \\ &a_{11} = -a_{22} = \left(1-\delta\right)a^0{}_S + b^0{}_S, \; a_{12} = 0, \; a_{21} = -\left[\left(1-\delta\right)a^0{}_z + b^0{}_z\right], \\ &b_{11} = 0, \; b_{12} = -a^0{}_S\delta, \; b_{21} = -\left[2b^0{}_S + \left(2-\delta\right)a^0{}_S\right], \; b_{22} = a^0{}_z\delta, \\ &F_{*1} = F^0{}_1\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}, \; F_{*2} = -\frac{2F^0{}_2\sqrt{\mu}}{\sqrt{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}}, \; a^0 = \ln\sqrt{\mu}, \; b^0 = \ln\sqrt{\delta}, \end{aligned}\right\}$$

(13а)
т. е. система уравнений (8) свелась к системе эллиптических уравнений для обобщенного аналитического вектора [3,4]. Для несжимаемого материала $d = 1$, l ® Θ.

Краевая задача Римана–Гильберта для обобщенного аналитического вектора (в упрощенной постановке) формулируется следующим образом: определить обобщенный аналитический вектор, непрерывный в смысле Гельдера в $D + \Gamma$ и удовлетворяющий граничному условию

$$\mathrm{Re}\left[\overline{G} \cdot \overline{\chi}(t)\right] = \overline{g}(t), \tag{14}$$

где $G(t)$ – заданная и непрерывная по Гельдеру на Γ матрица $\left(\det G(t) \neq 0\right)$ и $\overline{g}(t)$ – заданный непрерывный по Гельдеру действительный вектор. (Условия на $G(t)$, $\overline{g}(t)$ можно ослабить.)

Нетрудно убедиться, что для первой краевой задачи теории упругости (на Γ заданы усилия) согласно (12)–(14) имеем

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad \det G_1 = -2i, \quad g_1 = \mathrm{Re}\left(\frac{U_S}{m}\right), \quad g_2 = \mathrm{Im}\left(\frac{U_S}{m}\right). \tag{14а}$$

Для второй краевой задачи (на Γ заданы перемещения):

$$G_2 = \begin{pmatrix} A_0, & -B_0 \\ iA_0, & iB_0 \end{pmatrix}, \quad \det G_2 = 2iA_0B_0 \neq 0; \quad g_1 = \mathrm{Re}W, \quad g_2 = \mathrm{Im}W\,. \tag{14б}$$

Для третьей (смешанной) краевой задачи матрица G_3 принимает соответственно значения G_1 или G_2 и терпит разрыв на множестве меры нуль.

Таким образом, решение основных краевых задач плоской теории упругости изотропного неоднородного тела сводится к краевой задаче Римана–Гильберта для обобщенно-аналитического вектора [3, 4]. В случае постоянных упругих параметров из (12)–(13а) следует представление общего решения через две аналитические функции Колосова–Мусхелишвили [1].

Рассмотрим трансверсально-изотропное неоднородное тело. Тогда в главных осях анизотропии имеем [2]

$$\beta_{16} = \beta_{26} = c = d = 0, \beta_{66} = b = \frac{1}{\mu}, \beta_{11} = \beta_{22} = \frac{1}{E} - \frac{\nu'^2}{E'}, \beta_{12} = -(\frac{\nu}{E} + \frac{\nu'^2}{E'}), a = \frac{1-\nu}{E} - \frac{2\nu'^2}{E'},$$

$$F_0 = \frac{a(\theta_1 + \theta_2)}{4}, F_1 = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{4\mu}, E = 2\mu(1+\nu), \tag{15}$$

где ν, ν' – соответствующие коэффициенты Пуассона, а E, E' – модули Юнга. Если сравнить (15) с (11), то нетрудно заметить, что соотношения (11) переходят в (15), если заменить $(\lambda + \mu)^{-1}$ на $2a$. Поэтому в соотношениях (12)–(14б) для трасверсально-изотропного тела необходимо заменить $(\lambda + \mu)^{-1}$ на $2a$. Физически это означает, что трансверсально-изотропное тело при плоской деформации ведет себя как изотропное тело, что является хорошо известным фактом [2].

Теперь рассмотрим общий случай $(d \neq 0)$. Соотношения (8) можно представить в виде:

$$\vec{\chi}_S = q\vec{\chi}_Z + \vec{g}, \tag{16}$$

где

$$\vec{\chi} = \begin{bmatrix} W \\ \overline{L} \\ \overline{W} \\ L \end{bmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} \overline{F}_1 - \dfrac{b}{d} F_1 \\ \dfrac{F_1}{d} \\ 0 \\ \dfrac{cF_1}{d} - F_0 \end{bmatrix}, \quad L = U_{Z,} \overline{L} = U_{S,} q = (q_{ij}), (i, j = 1 \div 4), \tag{16a}$$

$$q_{11} = q_{21} = q_{41} = q_{43} = q_{44} = 0, q_{31} = -1, q_{42} = 1, q_{12} = -q_{34} = (bc - \overline{c}d)/d, q_{13} = -q_{24} = b/d,$$
$$q_{41} = (b^2 - \overline{d}d)/d, q_{22} = q_{33} = -c/d, q_{32} = (4ad - c^2)/d, q_{23} = -1/d.$$

Рассмотрим характеристическое уравнение $|q - \lambda E| = 0$. Оно имеет вид

$$e(\lambda) \equiv \lambda^4 + \frac{2c}{d}\lambda^3 + \frac{2(2a+b)}{d}\lambda^2 + \frac{2\overline{c}}{d}\lambda + \frac{\overline{d}}{d} = 0. \tag{17}$$

Нетрудно показать, что если *л* – корень уравнения (17), то $1/\overline{\lambda}$ – также корень уравнения (17). Для этого достаточно перейти к комплексно-сопряженному уравнению (17). Все корни уравнения (17) не могут быть действительными, а модули всех корней не могут быть равными единице. Это следует из того, что матрица q при $(d \neq 0)$ не является эрмитовой и унитарной. Положим

$$\lambda = \lambda_0 e^{-\frac{i\psi}{2}}, d = |d| e^{i\psi}, \alpha = \frac{2a+b}{|d|}, \beta = \frac{c}{|d|} e^{-\frac{i\psi}{2}}. \tag{17a}$$

Тогда уравнение (17) примет вид

$$\lambda_0^{\,4} + 2\beta\lambda_0^{\,3} + 2\alpha\lambda_0^{\,2} + 2\overline{\beta}\lambda_0 + 1 = 0. \tag{18}$$

Для его решения удобно воспользоваться способом Феррари [5]. Рассмотрим кубическое уравнение

$$g(y_1) = y_1^3 - 2\alpha y_1^2 + 4(|\beta|^2 - 1)y_1 + 4(2\alpha + 2|\beta|^2 - (\beta + \overline{\beta})^2) = 0, \tag{19}$$

и пусть y_1 – его действительный корень (определяется по формуле Кардано). Так как $g(2) = -4(\beta - \overline{\beta})^2 > 0, g(-2) = -4(\beta + \overline{\beta})^2 < 0,$ то он принадлежит отрезку [-2,2]. Тогда 4 корня уравнения (18) определяются как корни двух квадратных уравнений

$$\lambda_0^2 + (\beta \mp \varepsilon)\lambda_0 + (\frac{y_1}{2} \mp \varepsilon_1) = 0, \tag{20}$$

где

$$\beta^2 - 2\alpha + y_1 = \varepsilon^2, \beta y_1 - 2\overline{\beta} = 2\varepsilon\varepsilon_1, \frac{y_1^2}{4} - 1 = \varepsilon_1^2. \tag{20a}$$

Рассмотрим ортотропное тело в главных осях анизотропии ($\beta_{16} = \beta_{26} = 0$). Тогда коэффициенты уравнения (17) действительные, а структура корней есть $\lambda, \overline{\lambda}, 1/\overline{\lambda}, 1/\lambda$. Все корни комплексные и не могут быть кратными. Кроме того, два корня по модулю больше единицы, а два меньше. Если d>0, то в соотношениях (20), (20а) необходимо положить y_1=2, e_1=0, *в* – действительное. Если d<0, то y_1=-2, e_1=0, *в* – чисто мнимое. Заметим, что для изотропного и трансверсально-изотропных тел корни соответствующих характеристических уравнений двукратные и чисто мнимые $\pm \boldsymbol{i}$, т.е. не зависят от упругих параметров. В общем случае $(d \neq 0)$) корни не могут быть кратными. Действительно, если л$_0$ – корень кратности 2, то $1/\overline{\lambda}_0$ – тоже корень кратности 2. Поэтому ни один корень л$_0$ не может принимать значений ± 1. Используя теорему Виетта, структуру кратных корней и тот факт, что $\alpha > 0$, нетрудно показать, что:

$$2\alpha = \omega^2 + 2, \beta = \pm\omega, \omega = \rho + 1/\rho > 2, |\beta| > 2, \lambda_0 = \rho e^{i\varphi}.$$

Но тогда из (19)–(20а) следует, что $y_1 = 2 \mp \varepsilon = \varepsilon_1 \quad 0, \lambda_0^2 + \beta\lambda_0 + 1 = 0$, так как л$_0$ – комплексное, то | b | < 2. Полученное противоречие доказывает это утверждение.

Пусть система координат $Ox_1^{|}x_2^{|}$ получается поворотом системы координат $Ox_1\, x_2$ на угол ц. Используя результаты [2, формула (6.1)], соотношение (8а)], нетрудно получить выражения приведенных упругих «постоянных» в новой системе координат через старые:

$$a^{|} = a - \zeta, b^{|} = b + \zeta, c^{|} = ce^{2i\varphi}, d^{|} = (d + \zeta e^{-4i\varphi})e^{4i\varphi}, \zeta = 0.5(\beta_{26} - \beta_{16})\sin 4\varphi = \frac{1}{4i}(d - \overline{d})\sin 4\varphi. \quad (20б)$$

Для трансверсально-изотропного тела, как это следует из (20б), $a^{|} = a, b^{|} = b, c^{|} = d^{|} = 0$. Тогда в любой системе координат корни двукратные и равны ±i. Для ортотропного тела в главных осях анизотропии Im(d)=Im(c)=0. Тогда $a^{|} = a, b^{|} = b$. Нетрудно показать, что корни характеристических уравнений в системах координат $Ox_1^{|}x_2^{|}$ и $Ox_1\, x_2$ связаны соотношением

$$\lambda^{|} = \lambda e^{-2i\varphi}, |\lambda^{|}| = |\lambda|, \quad (20в)$$

т.е. их структура сохраняется в любой системе координат. Они попарно симметричны относительно единичной окружности с центром в точке О ($|\lambda_1^{|}| = |\lambda_2^{|}| < 1, |\lambda_3^{|}| = |\lambda_4^{|}| > 1$).

В работе [2] утверждается, что в общем случае анизотропии при плоской деформации существуют оси, в которых все уравнения плоской задачи не отличаются от уравнений для ортотропного тела. Но это не верно! Условие существования общих решений [формулы (6.6), (6.8), (6.9) с. 45] $\beta_{16}^{|}(\varphi) = \beta_{26}^{|}(\varphi) = 0$ в переменных (8а) записывается в виде

$$tg\psi = \frac{d - \overline{d}}{d + \overline{d}} = \frac{c^2 - \overline{c}^2}{c^2 + \overline{c}^2} = \sin 2\delta \text{ или } e^{-4i\delta} = \frac{\overline{c}^2}{c^2} = \frac{\overline{d}}{d} = e^{-2i\psi}, \quad (20г)$$

где $d = |d|e^{i\psi}, c = |c|e^{i\delta}$. Так как $|\sin 2\delta|$Ә1,а $|tg\psi|$ может быть больше единицы, то (20г), вообще говоря, не выполняется. Если (20г) имеет место, то из этого следует, что $\psi = 2\delta + \pi k, tg\psi = (-1)^k \sin\psi, \psi = \pi m$ (k, m – целые числа). Тогда d всегда действительное, а коэффициент с либо действительный, либо чисто мнимый. В первом случае имеем ортотропное тело, во втором случае, совершив поворот на угол $\varphi = \pi/4$, получим $d^{|}, c^{|}$ – действительными, т.е. опять имеем ортотропное тело. Это можно доказать и от противного. Поэтому в общем случае структура корней не меняется при повороте системы координат, а могут меняться их модули и направления (2a+b, d изменяются по модулю и направлению).

Таким образом, при плоской деформации в любой системе координат имеет место следующая структура корней:

изотропное тело $\Leftrightarrow (\lambda_{1,2} = i, \lambda_{3,4} = -i, \quad 2\beta_{11} = \beta_{66} + 2\beta_{12})$, трансверсально-изотропное тело $\Leftrightarrow (\lambda_{1,2} = i, \lambda_{3,4} = -i)$,

ортотропное тело $\Leftrightarrow$ $(|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1, |\lambda_3| = |\lambda_4| > 1, \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_4 = 0)$,

плоскость упругой симметрии $\Leftrightarrow (\lambda_1, 1/\overline{\lambda}_1, \lambda_2, 1/\overline{\lambda}_2, |\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1)$.

Стрелка $\Leftrightarrow$ в (21) означает, что утверждение справедливо как в прямую, так и в обратную стороны (в последнем легко убедиться, рассуждая от противного). Поэтому налицо изоморфизм между структурой корней и упругой симметрией. Следовательно, структура корней однозначно отражает внутреннюю симметрию анизотропного упругого материала. Это утверждение весьма полезно при обработке экспериментальных упругих параметров, которое позволяет достаточно просто установить вид анизотропии упругого тела.

Пусть $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1$. Обозначим $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, T, S$ матрицы

$$\tilde{q}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\overline{\lambda}_2} \end{bmatrix}, \tilde{q}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\overline{\lambda}_1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ \overline{T}_2 & \overline{T}_1 \end{bmatrix}, S = T^{-1} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ \overline{S}_2 & \overline{S}_1 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

где

$$T_1 = \begin{bmatrix} -1 & -\omega_2(\lambda_1) \\ \overline{\lambda}_2 & \dfrac{\omega_1(\overline{\lambda}_2)}{\overline{\lambda}_2} \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dfrac{\overline{\omega}_1(\lambda_1)}{\lambda_1} \\ -1 & \overline{\omega}_2(\overline{\lambda}_2) \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\overline{\omega}_1(\lambda_1)}{\Omega_1} & \dfrac{-\overline{\lambda}_2\overline{\omega}_2(\overline{\lambda}_2)}{\Omega_2} \\ \dfrac{\lambda_1^2}{\Omega_1} & \dfrac{\overline{\lambda}_2}{\Omega_2} \end{bmatrix}, \overline{S}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{-\lambda_1\omega_2(\lambda_1)}{\Omega_1} & \dfrac{-\omega_1(\overline{\lambda}_2)}{\Omega_2} \\ \dfrac{\lambda_1}{\Omega_1} & \dfrac{\overline{\lambda}^2{}_2}{\Omega_2} \end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1(\xi) = b\xi^2 + c\xi + d, \omega_2(\xi) = d\xi^2 + c\xi + b, -\lambda_1 e'_\lambda(\lambda_1) = \Omega_1 = 2(\overline{\omega}_1(\lambda_1) - \lambda_1^2\overline{\omega}_2(\lambda_1)), \\ &-\overline{\lambda}_2 e'_\lambda(\overline{\lambda}_2) = \Omega_2 = 2(\omega_2(\overline{\lambda}_2) - \overline{\lambda}_2^2\omega_2(\overline{\lambda}_2)). \end{aligned}\right\} \tag{22a}$$

Сделаем замену переменных:

$$\vec{Y} = T\vec{\chi}, \vec{Y} = \begin{bmatrix} y \\ \overline{y} \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Тогда система уравнений (16) приводится к виду

$$y_S = \tilde{q}_1 y_Z + A_1 y + B_1\overline{y} + (T_1 f_1 + T_2 f_2), \tag{24a}$$

$$\overline{y}_S = \tilde{q}_2\overline{y}_Z + A_2 y + B_2\overline{y} + (\overline{T}_2 f_1 + \overline{T}_1 f_2), \tag{24б}$$

где

$$\begin{aligned} &A_1 = (T_{1S} - \tilde{q}_1 T_{1Z})S_1 + (T_{2S} - \tilde{q}_1 T_{2Z})\overline{S}_2, B_1 = (T_{1S} - \tilde{q}_1 T_{1Z})S_2 + (T_{2S} - \tilde{q}_1 T_{2Z})\overline{S}_1, \\ &A_2 = -\tilde{q}_2\overline{B}_1, B_2 = -\tilde{q}_2\overline{A}_1. \end{aligned} \tag{25}$$

Уравнение, комплексно-сопряженное к (24б), есть уравнение (24а). Это следует из $\overline{\tilde{q}}_1\tilde{q}_2 = \overline{\tilde{q}}_2\tilde{q}_1 = E$ (E – единичная матрица) и равенства соответствующих членов от массовых сил, что проверяется непосредственно с учетом (16а). Для ортотропного тела $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 1/\lambda, |\lambda| < 1$. Заметим, что $\Omega_1, \Omega_2 \neq 0$, так как корни характеристического уравнения простые.

Для первой краевой задачи:

$$G_1 = \begin{bmatrix} \overline{S}_{21} + S_{23} & \overline{S}_{22} + S_{24} \\ i(\overline{S}_{21} - S_{23}) & i(\overline{S}_{21} - S_{23}) \end{bmatrix}, \det|G_1| = \frac{2i\overline{\lambda}_1\lambda_2}{\overline{\Omega}_1\overline{\Omega}_2}(1 - \overline{\lambda}_1\lambda_2) \neq 0, g_1 = \mathrm{Re}\left(\frac{U_S}{m}\right), \quad g_2 = \mathrm{Im}\left(\frac{U_S}{m}\right). \tag{26}$$

Для второй краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} & G_2 = \begin{bmatrix} \overline{S}_{11} + S_{13} & \overline{S}_{12} + S_{14} \\ i(\overline{S}_{11} - S_{13}) & i(\overline{S}_{12} - S_{14}) \end{bmatrix}, \det|G_2| \quad \frac{2i}{\overline{\Omega}_1\overline{\Omega}_2}(\overline{\lambda}_1\lambda_2\omega_2(\lambda_2)\overline{\omega}_2(\overline{\lambda}_1) - \omega_1(\overline{\lambda}_1)\overline{\omega}_1(\lambda_2)) \neq 0, \\ & g_1 = \mathrm{Re}\,W, \quad g_2 = \mathrm{Im}\,W. \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

Таким образом, как для ортотропного тела, так и для плоскости упругой симметрии краевые задачи статики сводятся к задаче Римана–Гильберта для обобщенного аналитического вектора [3, 4].

В случае постоянных приведенных упругих параметров и отсутствия массовых сил, с учетом (22)–(25), получаем представление общего решения типа С. Г. Лехницкого:

$$\begin{gathered} U = 2\,\mathrm{Re}(\Phi_1(\eta_1) + \Phi_2(\eta_2)), \\ -W = \frac{\overline{\omega_1}(\lambda_1)}{\lambda_1}\Phi_1^{\|} + \overline{\omega_2}(\overline{\lambda}_1)\overline{\Phi}_1^{\|} + \overline{\lambda}_2\overline{\omega_1}(1/\overline{\lambda}_2)\Phi_2^{\|} + \overline{\omega_2}(1/\lambda_2)\overline{\Phi}_2^{\|}, \end{gathered} \tag{28}$$

где $\Phi_1(\eta_1), \Phi_2(\eta_2)$ – аналитические функции комплексных аргументов

$$\eta_1 = \lambda_1 s + z, \eta_2 = (1/\overline{\lambda}_2)s + z. \tag{28a}$$

Система уравнений (8) приводится к каноническому виду и в переменных дивергенция – вихрь (предварительно упругий потенциал записывается в главных осях), а соответствующие краевые задачи также сводятся к задаче Римана–Гильберта. Такое представление очень важно для задач механики сплошной среды.

Так как $\|\widetilde{q}_1\| < 1$, то с помощью основного гомеоморфизма строится фундаментальное решение системы (24а), (24б), затем общее решение [3, 4]. Теорема существования и единственности следует из общих результатов теории обобщенного аналитического вектора, а для решения конкретных задач применим метод ГИУ. Но все это нуждается в детальном исследовании.

Чтобы не накладывать дополнительных условий на «гладкость» упругих параметров, систему уравнений (8) необходимо исследовать непосредственно, сведя ее к системе интегральных уравнений с помощью интегральных операторов по области [3]. Это существенно расширяет класс обобщенных решений и позволяет унифицировать класс контактных задач из составных материалов.

Изложенный в настоящей статье метод переносится непосредственно на плоско-напряженное состояние и на криволинейную анизотропию. Он может быть модифицирован на случай обобщенной плоской деформации и, по всей видимости, сыграет важную роль в построении моментной теории оболочек с помощью теории обобщенного аналитического вектора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартынов Н.И.* Применение теории обобщенного аналитического вектора к решению статических задач неоднородной изотропной среды // Международная научная конференция «Суверенный Казахстан: 15-летний путь развития космической деятельности», посвященный 70-летию академика У. М. Султангазина. Алматы, 2006. С. 62-65.

2. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

3. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 509 с.

4. *Боярский Б.В.* Теория обобщенного аналитического вектора // Annales Polonici Mathematicy. 1960. V. 17. P. 281-320.

5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. 831 с.

Резюме

Бір текті емес анизотропты ортаның статикалық шекаралық есептері Риман-Гильбертың жалпыланған аналитикалық вектор есебіне келтіріледі.