УДК 517.927.25

А. М. САРСЕНБИ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Получены асимптотические формулы собственных значений краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом в случае, когда оба краевых условия содержат значения производной.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с отклоняющимся аргументом следующего вида:

$$-u''(x)=\lambda u(-x),\ -1\le x\le 1. \qquad (1)$$

Для этого уравнения краевые условия наиболее общего вида записываются следующим образом:

$$\begin{cases}\alpha_1 u'(-1)+\beta_1 u'(1)+\alpha_{11}u(-1)+\beta_{11}u(1)=0,\\ \alpha_2 u'(-1)+\beta_2 u'(1)+\alpha_{21}u(-1)+\beta_{21}u(1)=0.\end{cases} \qquad (2)$$

Если $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$, то оба краевые условия будут содержать значения производной искомой функции $u(x)$. В этом случае, разрешая эту систему линейных уравнений относительно $u'(-1)$ и $u'(1)$, краевые условия можно представить в виде:

$$\begin{cases}u'(-1)+\alpha_{11}u(-1)+\beta_{11}u(1)=0,\\ u'(1)+\alpha_{21}u(-1)+\beta_{21}u(1)=0.\end{cases} \qquad (3)$$

Ради простоты коэффициенты α_{ij},β_{ij} снова обозначим прежним образом.

Линейно независимые решения уравнения (1) имеют вид

$$u_1(x)=e^{\rho\cdot x}-e^{-\rho\cdot x},\ u_2(x)=e^{i\rho\cdot x}+e^{-i\rho\cdot x},$$

где $\rho^2=\lambda$.

Линейные формы, содержащиеся в левой части соотношений (3), обозначим через $U_1(u)$ и $U_2(u)$:

$$U_1(u)=u'(-1)+\alpha_{11}u(-1)+\beta_{11}u(1);$$

$$U_2(u)=u'(1)+\alpha_{21}u(-1)+\beta_{21}u(1).$$

Всякое решение уравнения (1) может быть представлено соотношением

$$u(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x),$$

где c_1, c_2 – некоторые постоянные. Подставляя это выражение в краевые условия (2), получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}c_1U_1(u_1)+c_2U_1(u_2)=0,\\ c_1U_2(u_1)+c_2U_2(u_2)=0\end{cases}$$

относительно неизвестных c_1 и c_2. Определитель этой системы обозначим

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}U_1(u_1) & U_1(u_2),\\ U_2(u_1) & U_2(u_2).\end{vmatrix}$$

Будем искать нули этого определителя. Подставляя вместо $U_i(u_j)$ соответствующие значения и приравнивая к нулю получающиеся при этом выражения, получаем уравнение для определения собственных значений краевой задачи (1), (3):

$$\begin{aligned}&\left[-2i\rho^2+(1-i)\rho\cdot(B_1+B_4)+(1+i)\rho\cdot(B_2+B_3)+\right.\\&\left.+2C_0\right]e^{(-1-i)\rho}+\left[2i\rho^2+(1+i)\rho\cdot(B_1+B_4)+\right.\\&\left.+(1-i)\rho\cdot(B_2+B_3)+2C_0\right]e^{(-1+i)\rho}+\\&+\left[-2i\rho^2+(1+i)\rho\cdot(B_1+B_4)+(1-i)\rho\cdot(B_2+B_3)-\right.\\&\left.-2C_0\right]e^{(1-i)\rho}+\left[2i\rho^2+(1-i)\rho\cdot(B_1+B_4)+\right.\\&\left.+(1+i)\rho\cdot(B_2+B_3)-2C_0\right]e^{(1+i)\rho}=0,\end{aligned} \qquad (3)$$

где $B_1=\begin{vmatrix}1 & \alpha_{11}\\ 0 & \alpha_{21}\end{vmatrix}$, $B_2=\begin{vmatrix}1 & \beta_{11}\\ 0 & \beta_{21}\end{vmatrix}$, $B_3=\begin{vmatrix}0 & \alpha_{11}\\ 1 & \alpha_{21}\end{vmatrix}$,

$B_4=\begin{vmatrix}0 & \beta_{11}\\ 1 & \beta_{21}\end{vmatrix}$, $C_0=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_{11}\\ \alpha_{21} & \beta_{21}\end{vmatrix}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Краевая задача (1), (2) имеет две серии собственных значений следующего вида:

$$\lambda_{k1} = -\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \cdot \left[1+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],$$

$$\lambda_{k2} = k^2\pi^2 \cdot \left[1+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right].$$

При этом каждое собственное значение, начиная с некоторого, является простым.

Доказательство. Считая r достаточно большим по модулю комплексным числом, разделим обе части уравнения (3) на величину $2i\rho^2$. Тогда

$$\left[-1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(-1-i)\rho} + \left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(-1+i)\rho} + \left[-1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1-i)\rho} + \left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1+i)\rho} = 0. \tag{4}$$

Проследим поведение функций

$$\varphi_1(\rho) = e^{(-1-i)\rho},\ \varphi_2(\rho) = e^{(-1+i)\rho},$$

$$\varphi_3(\rho) = e^{(1-i)\rho},\ \varphi_4(\rho) = e^{(1+i)\rho},$$

которые связаны между собой соотношениями

$$\varphi_1(\rho) = \varphi_4(-\rho),\ \varphi_2(\rho) = \varphi_3(-\rho).$$

Если обозначить $\rho = \rho_1 + i\rho_2$, то

1) $\mathrm{Re}(-1-i)\rho = -\rho_1 + \rho_2$,

2) $\mathrm{Re}(-1+i)\rho = -\rho_1 - \rho_2$,

3) $\mathrm{Re}(1-i)\rho = \rho_1 + \rho_2$, 4) $\mathrm{Re}(1+i)\rho = \rho_1 - \rho_2$.

Эти четыре величины определяют асимптотическое поведение функции $\varphi_i(\rho)$, которые можно записать в следующем виде:

1) $|\varphi_1(\rho)| \sim e^{-\rho_1+\rho_2}$, 2) $|\varphi_2(\rho)| \sim e^{-\rho_1-\rho_2}$, 3) $|\varphi_3(\rho)| \sim e^{\rho_1+\rho_2}$, 4) $|\varphi_4(\rho)| \sim e^{\rho_1-\rho_2}$.

При любом расположении комплексных чисел *r* в *r*-плоскости, кроме случая $\rho_1 = \pm\rho_2$, какие-нибудь две из величин $|\varphi_i(\rho)|$, $i=\overline{1,4}$ экспоненциально убывают, а оставшиеся две экспоненциально растут. В случае $\rho_1 = \pm\rho_2$ только одна из величин $|\varphi_i(\rho)|$ экспоненциально растет, одна экспоненциально убывает, а оставшиеся две оказываются ограниченными, так что при больших значениях $|r|$ уравнение (4) не имеет решений.

Рассмотрим области комплексной *r*-плоскости, расположенные между биссектрисами координатных углов.

1-случай. Пусть $\rho_2 \ge 0$ и $\rho_2 > |\rho_1|$. Тогда $|\varphi_1(\rho)|$ и $|\varphi_3(\rho)|$ экспоненциально стремятся к бесконечности, а $|\varphi_2(\rho)|$ и $|\varphi_4(\rho)|$ экспоненциально убывают при $|\rho| \to \infty$. При этом уравнение (4) принимает вид

$$\left[-1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(-1-i)\rho} + \left[-1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1-i)\rho} = 0 \tag{5}$$

или

$$\left[-1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{-2\rho} = 1+O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

т.е.

$$e^{-2\rho} = \frac{1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)}{-1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)} = -1+O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

(5¥)

поэтому

$$2\rho = (2k+1)\pi i + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Отсюда

$$\rho=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i+O\left(\frac{1}{\rho}\right),\quad k=0,\pm1,\pm2,\text{K}$$

(6)

Около каждой точки $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i$ опишем окружности γ_{k1} одного и того же радиуса *r*. В рассматриваемом случае числа *k* положительны. По теореме Руше [1, с. 263] при достаточно большом |*r*| уравнение (5Ұ) может иметь нули только внутри окружности γ_{k1}, причем имеет их столько, сколько их имеет уравнение

$$e^{-2\rho}=1,$$

т.е. точно по одному корню внутри каждой окружности γ_{k1}. Возведя в квадрат выражение (6), получим первое утверждение теоремы.

Мы рассмотрели случай, когда r лежит в верхней полуплоскости, между биссектрисами I и II координатных углов. К этому же результату приводит случай, когда r лежит в нижней полуплоскости, между биссектрисами III и IV координатных углов.

2-случай. Пусть $\rho_1\geq 0$ и $\rho_1|>|\rho_2|$. Тогда $|\varphi_1(\rho)|$ и $|\varphi_2(\rho)|$ экспоненциально убывают, а $|\varphi_3(\rho)|$ и $|\varphi_4(\rho)|$ экспоненциально стремятся к бесконечности при $|\rho|\to\infty$. В результате этого из уравнения (4) получим

$$\left[-1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1-i)\rho}+\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1+i)\rho}=0. \tag{7}$$

Преобразуем уравнение (7)

$$\left[-1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{-2i\rho}=1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

или

$$e^{-2i\rho}=-\frac{1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)}{-1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)}=1+O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

(7Ұ)

Поэтому $\rho=k\pi+O\left(\frac{1}{\rho}\right)$, $k=0,\pm1,\pm2,\text{K}$ (8)

Как и выше, около каждой точки *kp* опишем окружности γ_{k2} одного и того же радиуса. В данном случае числа *k* положительны. По той же теореме Руше при достаточно большом |*r*| уравнение (7Ұ) может иметь нули только внутри окруж-ности γ_{k2}, причем уравнение (7) и уравнение

$$e^{-2i\rho}=1$$

имеют одинаковое число корней внутри каждой окружности γ_{k2}, т.е. точно по одному корню. Возведя в квадрат выражение (8), получаем вторую серию собственных значений.

Аналогичный результат получим, если рассмотреть r в области, находящейся между биссектрисами II и III координатных углов. Теорема доказана.

При доказательстве теоремы использован метод Биркгофа, изложенный в монографии М. А. Наймарка [2, с. 74].

Выражаем глубокую благодарность д. ф.-м. н. М. А. Садыбекову за неоднократное обсуждение результатов и очень полезные советы, а также академику Т. Ш. Кальменову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функции комплексного переменного. М., 1982. 488 с.

2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 528 с.

Резюме

Бұл мақалада $u''+\lambda u(-x)=0$ теңдеуінің шеттік шарттарының екеуінде де туындының мәндері бар болған жағдайда оның меншікті мәндерінің асимптотикалық формулалары келтірілген.