УДК 517.927.25

А. М. САРСЕНБИ

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

На произвольном конечном интервале G числовой прямой рассмотрим одномерный оператор Шредингера

$$Lu = -u''(x) + q(x)u(x) \tag{1}$$

с комплекснозначным потенциалом $q(x)$ из класса $L_1(G)$. При этом мы считаем, что оператор L порожден дифференциальным выражением (1) и какими-нибудь краевыми условиями, конкретный вид которых не играет особой роли. Поэтому, следуя В. А. Ильину [1], собственные и присоединенные функции оператора L будем понимать в обобщенном смысле, а именно как регулярные решения уравнения

$$Lu_k = \lambda_k u_k - a_k u_{k-1}. \tag{2}$$

На интервале G, где $a_1 = 0$, числа a_k равны либо нулю (в этом случае функцию $u_k(x)$ называем собственной функцией), либо единице (в этом случае считаем $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ и функцию $u_k(x)$ называем присоединенной функцией).

Всюду в дальнейшем индекс k при спектральном параметре λ не пишется. В наших рассмотрениях функции $u_k(x)$ – это элементы произвольной цепочки присоединенных функций, соответствующие конкретному собственному значению λ.

При исследовании вопросов базисности и равносходимости спектральных разложений с тригонометрическим рядом одним из важнейших спектральных характеристик изучаемого дифференциального оператора является требование принадлежности спектра так называемой параболе Карлемана.

В случае рассматриваемого нами оператора Шредингера это требование имеет вид

$$\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right| \le const, \tag{3}$$

где $\sqrt{\lambda}$ – это тот корень из комплексного числа λ, для которого $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$.

Указанное требование принадлежности спектра оператора параболе Карлемана присутствует во многих трудах В. А. Ильина и его последователей: В. В. Тихомирова, И. С. Ломова, Н. Б. Керимова, В. Д. Будаева, В. М. Курбанова и многих других авторов. Отметим лишь работы [1–6], а также работы [7–10] автора настоящей статьи.

Покажем тесную связь между принадлежностью спектра параболе Карлемана и поведением норм корневых функций оператора L, порожденного выражением (1) и какими-нибудь краевыми условиями. При доказательстве наших результатов существенную роль играют оценки корневых функций оператора L, полученные В. В. Тихомировым в работе [2]:

$$c_1 \| u_k \|_{L_q(G)} \le \| u_k \|_{L_S(G)} \cdot \left[1 + \left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|\right]^{\frac{1}{S}-\frac{1}{q}} \le \le c_2 \| u_k \|_{L_q(G)}, \tag{4}$$

где $1 \le q \le s \le +\infty$, а константы c_1 и c_2 зависят лишь от меры области G и от порядка присоединенной функции;

$$c_3 \| u_k \|_{L_q(K)} \le \| u_k \|_{L_q(K_R)} \exp\left\{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right| \cdot R\right\} \le \le c_4 \left[1 + \left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|\right]^i \| u_k \|_{L_q(K)}, \tag{5}$$

где $1 \le q \le \infty$, $K_R \subset K$, $R = dist(K_R, \partial K) \le \frac{1}{2} mesK$, i – порядок присоединенной функции в данной цепочке; константы c_3, c_4 зависят от меры компакта K и числа R, а также от порядка присоединенной функции.

Будем считать, что длины всех цепочек присоединенных функций равномерно ограничены. Тогда константы c_1, c_2, c_3, c_4 в соотношениях (4) и (5) будут одинаковыми для всех цепочек присоединенных функций. Без ограничения общности можно считать $G = (0,1)$.

Теперь сформулируем основные результаты настоящей статьи.

Теорема 1. Если для всех собственных значений оператора L выполнено неравенство (3), то для любой собственной или присоединенной функции этого оператора выполнены оценки

$$\| u_k \|_{L_\infty(G)} \le c_5 \| u_k \|_{L_q(G)},\ q \ge 1, \qquad (6)$$

и, наоборот, если имеют место оценки (6), то спектр оператора L принадлежит параболе Карлемана.

Следующая теорема устанавливает зависимость между расположением спектра и эквивалентностью норм собственных и присоединенных функций по различным компактам.

Пусть $K_R \subset K \subset G$, причем $R = dist(K_R, \partial K) \le$ $\le \frac{1}{2} mesK$.

Теорема 2. Если спектр оператора L принадлежит параболе Карлемана, то для всех собственных и присоединенных функций имеют место оценки

$$\| u_k \|_{L_q(K)} \le c_6 \| u_k \|_{L_q(K_R)},\ q \ge 1, \qquad (7)$$

и наоборот, если для всех собственных и присоединенных функций выполнены соотношения (7), то выполняется условие (3).

Определенный интерес представляет следующая теорема.

Теорема 3. Пусть спектр оператора L принадлежит параболе Карлемана, т.е. выполнено условие (3), и пусть собственные и присоединенные функции нормированы в $L_2(G)$. Тогда существует такое число $\alpha > 0$ и также множество $G_1 \subset G$ с мерой $mes\, G_1 \ge \frac{\alpha}{8}$, что

$$| u_k(x) | \ge \frac{\alpha}{4}, \quad \forall x \in G_1. \qquad (8)$$

Оценки типа (7) при q=2 имеются в недавней работе [11].

Результаты, имеющие тесную внутреннюю связь с теоремами 1–3, получены в кандидатской диссертации [12] автора.

Перейдем к доказательству полученных результатов.

Необходимость теоремы 1 хорошо известна. Оценки (6) при выполнении условия (3) имеются, например, в работе [3]. Докажем достаточность неравенств (6). Для этого в (4) положим $s = \infty$ и рассмотрим первую половину соотношения (4), которую запишем в виде

$$c_1 \left[1 + \left| \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \right| \right]^{\frac{1}{q}} \cdot \| u_k \|_{L_q(G)} \le \| u_k \|_{L_\infty(G)}.$$

К правой части полученного неравенства применим (6), в результате чего будем иметь

$$c_1 \left[1 + \left| \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \right| \right]^{\frac{1}{q}} \cdot \| u_k \|_{L_q(G)} \le c_5 \| u_k \|_{L_q(G)},$$

откуда вытекает

$$\left[1 + \left| \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \right| \right]^{\frac{1}{q}} \le \frac{c_5}{c_1},$$

что означает равномерную ограниченность величин $\left| \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \right|$, т.е. выполнено условие (3). Теорема 1 доказана.

Необходимость теоремы 2 мгновенно следует из левой половины (5), если только выполнено условие (3). Докажем достаточность. Пусть выполнены оценки (7). Вторую половину соотношений (5) перепишем в виде

$$\frac{\exp\left(\left| \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \right| R \right)}{\left[1 + | \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} | \right]^i} \cdot \| u_k \|_{L_q(K_R)} \le c_4 \| u_k \|_{L_q(K)}$$

и применим к правой части этого неравенства оценки (7), в результате получим

$$\frac{\exp\left(\left| \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \right| R \right)}{\left[1 + | \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} | \right]^i} \cdot \| u_k \|_{L_q(K_R)} \le c_6 c_4 \| u_k \|_{L_q(K_R)}.$$

Сократим обе части на величину $\| u_k \|_{L_q(K_R)}$. Тогда

$$\frac{\exp\left(\left| \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \right| R \right)}{\left[1 + | \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} | \right]^i} \le c_6 c_4.$$

Последнее соотношение возможно лишь при единственном условии (3). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть выполнены условия теоремы. Рассмотрим вторую половину соотношений (4) при $q = 1$ и $s = 2$

$$\| u_k \|_{L_2(G)} \left[1 + \left| \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \right| \right]^{-\frac{1}{2}} \le c_2 \| u_k \|_{L_1(G)}.$$

Нормированность в $L_2(G)$ корневых функций, условие (3) и последняя оценка обеспечивают существование такой постоянной $\alpha > 0$, что имеет место неравенство

$$\| u_k \|_{L_1(G)} \geq \alpha > 0$$

для всех корневых функций. Теперь на основании результатов работы [3, с.42] приходим к справедливости утверждения (8) теоремы 3. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР. 1983. Т. 273, № 4. С. 1048-1053.

2. *Тихомиров В.В.* Точные оценки регулярных решений одномерного уравнения Шредингера со спектральным параметром // ДАН СССР. 1983. Т. 273, № 4. С. 807-810.

3. *Ломов И.С.* Некоторые свойства собственных и присоединенных функций оператора Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 10. С. 1684-1694.

4. *Керимов Н.Б.* Базисность и равномерная минимальность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов: Дис. ... док. физ.-мат. наук. М., 1996.

5. *Будаев В.Д.* Безусловная базисность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов: Дис. ... док. физ.-мат. наук. М., 1993.

6. *Курбанов В.М.* Распределение собственных значений и сходимость биортогональных разложений по корневым функциям обыкновенных дифференциальных операторов: Дис. ... док. физ.-мат. наук. М., 1999.

7. *Сарсенби А.М.* Критерий базисности Рисса корневых функций дифференциального оператора второго порядка // Докл. НАН РК. 2006. №1. С. 44-48.

8. *Сарсенби А.М.* Необходимые и достаточные условия базисности Рисса систем корневых функций оператора Шредингера // Изв. НАН РК. Сер. физико-математическая. 2006. № 1. С. 32-34.

9. *Сарсенби А.М.* Об одном условии базисности Рисса корневых векторов операторов второго порядка // Вестник НАН РК. 2006. №1. С. 38-41.

10. *Сарсенби А.М.* Об одном свойстве базисов из корневых функций оператора Шредингера // Поиск. 2006. № 1. С. 240-242.

11. *Будаев В.Д., Колесникова О.В.* О связи условия Карлемана с эквивалентностью норм корневых функций по различным компактам // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 4. С. 441-447.

12. *Сарсенбиев А.М.* О свойствах корневых векторов некоторых несамосопряженных дифференциальных операторов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1989.

13. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М., 1984.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент

Поступила 07.01.07г.