УДК 517.925

Ж. А. САРТАБАНОВ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ МНОГОМЕРНОГО ВРЕМЕНИ

Приводится обоснование метода малого параметра в исследовании квазипериодических решений квазилинейных систем дифференциальных уравнений.

Будем пользоваться обозначениями $\tau = t_0 \in R = (-\infty, +\infty)$, $t = (t_1, \dots, t_m) \in R \times \dots \times R = R^m$, (t, t) – время с $1 + m$ измерениями; $e = (1,\dots,1)$ – m-вектор, $t = et$ – уравнение главной диагонали пространства временных переменных; ν_0, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ – рационально несоизмеримые частоты колебаний систем относительно переменных t, t; $\theta = \omega_0$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ – периоды колебаний по t, t, причем $\omega_j = \nu_j^{-1}$, $j = \overline{0, m}$, $k_0\omega_0$, $k\omega = (k_1\omega_1, \dots, k_m\omega_m)$ – кратные периоды с кратностями $k_0 \in Z$, $k = (k_1, \dots, k_m) \in Z \times \dots \times Z = Z^m$, Z – множество целых чисел; $\Pi_j = \{t_j : |\mathrm{Im}\, t_j| < 2\pi\nu_j\delta = \delta_j\}$, $\delta = const > 0$, $\Pi_\delta^m = \Pi_1 \times \dots \times \Pi_m$ – полоса в пространстве комплексных переменных, C_Δ – круг комплексной плоскости, $C_\Delta^n = C_\Delta \times \dots \times C_\Delta$; $C_\tau^{æ,\theta}$ – множество непрерывно дифференцируемых æ раз q-периодических по t элементов, A_t^ω – множество аналитических w-периодических по t элементов, $A_{x,\mu}$ – множество аналитических по x, m элементов; $D = \sum_{j=0}^{m} \partial_j$ – оператор дифференцирования в пространстве (t,t) по направлению $\tilde{e} = (1, e)$ главной диагонали $t = et$, ∂_j – производная по t_j, $j = \overline{0, m}$. Заметим, что оператор D на диагонали переходит в обычный оператор дифференцирования $\frac{d}{d\tau}$.

Поле направлений в пространстве переменных $x = (x_1, \dots, x_m)$ задается системой

$$Dx = Ax + g(\tau, t) + \mu f(\tau, t, x, \mu) \qquad (1)$$

с малым параметром $\mu \in [0, \mu_0) = M_0$, $\mu_0 = const > 0$, постоянной $n \times n$-матрицей A, n – вектор-функциями g и f.

Ставится задача о выяснении условий существования решений системы (1), которые обращаются в квазипериодические решения системы, полученные на главной диагонали:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = A\xi + g(\tau, e\tau) + \mu f(\tau, e\tau, \xi, \mu). \qquad (1^*)$$

Исследование такой задачи предложено в [1] в связи с неприменимостью малого параметра Пуанкаре [2] по изучению периодических решений к задачам о квазипериодических решениях системы (1*). При исследовании последней задачи, как правило, сталкиваемся с трудностью малых делителей, которая в основном преодолевается путем использования метода ускорений сходимости, разработанной в КАМ теории.

В [1] для решения поставленной задачи предлагалось определение периодических по временным переменным (t,t) (τ, t) решений системы (1) и перейти к рассмотрению их на диагонали. Дальнейшее исследование [3, 4] показало, что применение метода малого параметра к решению этой задачи приводит к исследованию периодических решений функционально-разностных уравнений, связанному с трудностью малых знаменателей.

В [5] для исследования поставленной задачи предложен другой подход, где учитывается, что решение задачи Коши для системы (1), кроме t, t, зависит и от аргумента $s = t - et$, который исчезает при рассмотрении решения на диагонали $t = et$. А именно для определения решения x системы (1) с начальным условием $x|_{\tau=0} = u(t)$ мы должны интегрировать по параметру s правую часть системы (1) вдоль прямой $\widetilde{\tau}=s$, $\widetilde{t}=\sigma+es$, параллельной диагонали, от точки $(0,\sigma)=(0,t-e\tau)$ до точки (t, t), где параметр s изменяется от 0 до t. Эта прямая при t = et переходит в главную диагональ. Тогда имеем систему интегральных уравнений

$$x(\tau,t,\sigma,u(\sigma))=u(\sigma)+\int\limits_{(0,\sigma)}^{(\tau,t)}\Big[Ax(\widetilde{\tau},\widetilde{t},\sigma,u(\sigma))+$$

$$+g(\widetilde{\tau},\widetilde{t})+\mu f(\widetilde{\tau},\widetilde{t},x(\widetilde{\tau},\widetilde{t},\sigma,u(\sigma),\mu)\Big]ds, \quad (2)$$

эквивалентную решению поставленной задачи Коши для системы (1). Поскольку s на диагонали исчезает, то для квазипериодичности $x(\tau,t,\sigma,u(\sigma))$ при t = et достаточно периодичности этого решения по первым двум аргументам t, t. Чтобы добиться этого, необходимо выбрать надлежащим образом начальную функцию $u(s)$.

В дальнейшем предположим выполненными условия

$$\lambda\neq 2\pi i\sum_{j=0}^{m}k_j\nu_j,\quad \forall(k_0,k)\in Z\times Z^m, \quad (3)$$

$$g(\tau,t)\in C_\tau^\theta A_t^\omega(R\times\Pi_\delta^m), \quad (4)$$

$$f(\tau,t,x,\mu)\in C_\tau^\theta A_t^\omega A_{x,\mu}(R\times\Pi_\delta^m\times C_\Delta\times M_0), \quad (5)$$

где l – собственные значения матрицы A, i – мнимая единица.

Известно [5], что для w-периодичности по t решения $x(\tau,t,\sigma,u(\sigma))$ необходимо и достаточно, чтобы начальная функция $u(s)$ принадлежала классу $A_\sigma^\omega(\Pi_\delta^m)$. При этом решение окажется w-периодическим и по s, и обратно, из w-периодичности решения по t и s следует w-периодичность $u(s)$ по s. Таким образом, из $u(\sigma)\in A_\sigma^\omega(\Pi_\delta^m)$ получим (w,w)-периодичность решения $x(t,t,s,u(s))$ по (t,s) и обратно. Тогда для (q,w,w)-периодичности $x(t,t,s,u(s))$ по (t,t,s) необходимо и достаточно выполнение условия

$$x(\theta,\sigma,\sigma,u(\sigma))=x(0,\sigma,\sigma,u(\sigma))=$$

$$=u(\sigma)\in A_\sigma^\omega(\Pi_\delta^m). \quad (6)$$

На основе условий (3) и (6) легко убедиться, что однородная линейная система

$$Dx=Ax \quad (7)$$

не имеет (q,w,w)-периодических решений, кроме x = 0.

Чтобы исследовать (θ,ω,ω)-периодические по (τ,t,σ) решения неоднородной линейной системы

$$Dx=Ax+g(\tau,t), \quad (8)$$

на основе общего решения

$$x(\tau,t,\sigma)=\mathrm{X}(\tau)u(\sigma)+\int\limits_{(0,\sigma)}^{(\tau,t)}\mathrm{X}(t-\widetilde{\tau})g(\widetilde{\tau},\widetilde{t})ds, \quad (9)$$

пользуясь необходимым и достаточным условием периодичности (6), получим

$$u(\sigma)=[\mathrm{E}-\mathrm{X}(\theta)]^{-1}\int\limits_{(0,\sigma)}^{(\theta,\sigma)}\mathrm{X}(\theta-\widetilde{\tau})g(\widetilde{\tau},\widetilde{t})ds. \quad (10)$$

Тогда подставив представление (10) в общее решение (9), имеем (θ,ω,ω)– периодическое по (τ,t,σ) решение системы (8), причем в силу (4) получим $x(\tau,t,\sigma)\in C_\tau^\theta A_t^\omega A_\sigma^\omega(R\times\Pi_\delta^m\Pi_\delta^m)$. Это решение единственное, поскольку при условии (3) однородная система (7) не имеет таких решений, кроме нулевого.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *При условиях (3) и (4) неоднородная линейная система (8) имеет единственное* (θ,ω,ω)*-периодическое по* (τ,t,σ) *решение* $x(\tau,t,\sigma)$*, определяемое соотношениями (9)–(10).*

Заметим, что в случае определения (θ,ω)-периодических по (τ,t) решений системы (8), согласно [4], при нахождении начальной вектор-функции $u(\sigma)$ мы имели бы дело с уравнением гомологического типа [6] и согласно КАМ теории налагали бы на $\lambda-2\pi\theta i\sum_{j=0}^{m}k_j\nu_j$ дополнительное условие, связанное с сильной несоизмеримостью частот $\lambda,\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_m$.

Теперь для исследования поставленной задачи для системы (1) предварительно рассмотрим уравнение

$$F(\sigma,u,\mu)=0 \quad (11)$$

с условием

$$F(\sigma,\widetilde{u}(\sigma),0)=0\,, \qquad (12)$$

где n – вектор-функция $F(\sigma,u,\mu)\in \in A_\sigma^\omega A_{u,\mu}\left(\Pi_\delta^m\times\widetilde{C}_\Delta^n\times M_0\right)$, $\widetilde{u}(\sigma)\in A_\sigma^\omega\left(\Pi_\delta^m\right)$, $\widetilde{C}_\Delta^n=\{u\,|\,\|u-\widetilde{u}(\sigma)\|<\Delta\}$.

Поставим задачу о существовании неявной функции $u(\sigma,\mu)\in A_\sigma^\omega A_\mu\left(\Pi_\delta^m\times M_1\right)$ для $\forall\sigma\in\Pi_\delta^m$ в окрестности точки $(\widetilde{u}(\sigma),0)$, определяемой уравнением (11) и условием (12) при выполнении неравенства

$$\det F_u(\sigma,\widetilde{u}(\sigma),0)\neq 0\,,\ \sigma\in\Pi_\delta^m \qquad (13)$$

для якобиана $\det F_u(\sigma,u,\mu)$ вектор-функции $F(\sigma,u,\mu)$.

Чтобы решить эту задачу, будем пользоваться методом сжатых отображений для уравнения

$$u=Q(\sigma,u,\mu),\ (\sigma,u,\mu)\in\Pi_\delta^m\times\widetilde{C}_{\Delta_1}^n\times M_1, \quad (14)$$

где $Q(\sigma,u,\mu)=u-\left[F_u(\sigma,\widetilde{u}(\sigma),0)\right]^{-1}F(\sigma,u,\mu)$ при достаточно малых положительных значениях $\mu_1=const\le\mu_0$, $\Delta_1=const\le\Delta$, независящих от $\sigma\in\Pi_\delta^m$.

Очевидно, что $Q(\sigma,\widetilde{u}(\sigma),0)=\widetilde{u}(\sigma)$ и $\|Q_u(\sigma,u,\mu)\| =\left\|\mathrm{E}-[F_u(\sigma,\widetilde{u}(\sigma),0)]^{-1}F_u(\sigma,u,\mu)\right\|\le$ $\le q=const<1$ при достаточно малых $\mu\le\mu_1$, $\|u-\widetilde{u}(\sigma)\|\le\Delta_1$.

Отсюда легко показать, что оператор $Q(\sigma,u,\mu)$ отображает шар $C_{\Delta_1}^n$ в себя и является сжимающим отображением. Так как уравнения (11) и (14) эквивалентные, то имеем следующее утверждение.

Лемма. *При* $F(\sigma,u,\mu)\in A_\sigma^\omega A_{u,\mu}\left(\Pi_\delta^m\times\widetilde{C}_\Delta^n\times M_0\right)$ *и условии (13) уравнение (11) с условием (12) определяет единственную функцию* $u(\sigma,\mu)\in A_\sigma^\omega A_\mu\left(\Pi_\delta^m\times M_1\right)$ *при достаточно малых значениях* $\mu\in M_1\subset M_0$, *причем* $u(\sigma,0)=\widetilde{u}(\sigma)$.

В заключение заметим, что $u(\sigma)\in R^n$ при $\sigma\in\Pi_\delta^m\cap R^m$, иначе говоря, $u(\sigma)$ является вещественно аналитической при $u(\sigma)\in R^m$.

В данной лемме $\sigma\in\Pi_\delta^m$ участвует как параметр и необходимые сужения областей изменения аргументов *u*, *m* проводятся равномерно относительно *s*.

Далее, на основе этой леммы докажем теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (3)–(5). Тогда система (1) имеет единственное* (θ,ω,ω)*-периодическое по* (τ,t,σ) *решение*

$$x^*(\tau,t,\sigma,\mu)\in C_\tau^{1,\theta}A_{t,\sigma}^\omega A_\mu\left(R\times R^m\times R^m\times M_1\right),$$

стремящееся к (θ,ω,ω)*-периодическому решению* $\widetilde{x}(\tau,t,\sigma)$ *уравнения (8) при* $\mu\to 0$.

Действительно, нетрудно показать, что решение $x(\tau,t,\sigma,u,\mu)$ системы (1) с начальной функцией $u=u(\sigma)$ при $\tau=0$, $t=\sigma$ аналитично относительно совокупности аргументов *u*, *m*.

Пользуясь условием (6) (θ,ω,ω)-периодичности по (τ,t,σ) решения $x(\tau,t,\sigma,u,\mu)$, имеем

$$F(\sigma,u,\mu)\equiv x(\theta,\sigma,\sigma,u,\mu)-u=0\,, \quad (15)$$

причем

$$F(\sigma,\widetilde{u}(\sigma),0)=x(\theta,\sigma,\sigma,\widetilde{u}(\sigma),0)-\widetilde{u}(\sigma)=$$
$$=\widetilde{x}(\theta,\sigma,\sigma)-\widetilde{u}(\sigma)=0\,, \qquad (16)$$

где $\widetilde{u}(\sigma)=\widetilde{x}(0,\sigma,\sigma)\in A_\sigma^\omega\left(\Pi_\delta^m\right)$, $u=u(\sigma,\mu)\in \in A_\sigma^\omega A_\mu\left(\Pi_\delta^m\times M_0\right)$.

На основе условий (3)–(5) нетрудно показать, что $F(\sigma,u,\mu)\in A_\sigma^\omega A_{u,\mu}\left(\Pi_\delta^m\times\widetilde{C}_\Delta^n\times M_0\right)$ и ее якобиева матрица $F_u(\sigma,u,\mu)$ определяются соотношением

$$F_u(\sigma,u,\mu)=\frac{\partial x(\theta,\sigma,\sigma,u,\mu)}{\partial u}-\mathrm{E}\equiv$$

$$\equiv \mathrm{Y}(\theta,\sigma,\sigma,\mu)-\mathrm{E}, \qquad (17)$$

где $\mathrm{Y}(\tau,t,\sigma,\mu)=\dfrac{\partial x(\tau,t,\sigma,u(\sigma,\mu),\mu)}{\partial u}$ является матрициантом линейной системы в вариациях

$$Dy=\left[\mathrm{A}+\mu\frac{\partial f(\tau,t,x(\tau,t,\sigma,u(\sigma,\mu),\mu),\mu)}{\partial x}\right]y$$

с начальным условием $\mathrm{Y}(0,t,t,\mu)=\mathrm{E}$ – единичная матрица. Следовательно, $\mathrm{Y}(\tau,t,\sigma,0)=\mathrm{X}(\tau)=\exp[A\tau]$. Тогда в силу (17) с учетом (3) имеем

$$\det F_u(\sigma,\tilde{u}(\sigma),0)=\det\left[e^{A\theta}-\mathrm{E}\right]\neq 0\,. \qquad (18)$$

Следовательно, в силу (18) уравнение (15) с условием (16), согласно лемме, определяет единственную функцию $u=u^*(\sigma,\mu)\to\tilde{u}(\sigma)$ при $\mu\to 0$, а $x(\tau,t,\sigma,u^*(\sigma,\mu),\mu)=x^*(\tau,t,\sigma,\mu)$ есть единственное решение основной задачи, стремящемся к $\tilde{x}(\tau,t,\sigma)$ при $\mu\to 0$.

Теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что при условиях теоремы 2 диагональная функция $x^*(\tau,e\tau,0,\mu)=$ $=\xi^*(\tau,\mu)$ является квазипериодическим решением системы (1*), которое при $\mu\to 0$ стремится к решению $\tilde{\xi}(\tau)$ линейной неоднородной системы

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\mathrm{A}\xi+g(\tau,e\tau).$$

Таким образом, обоснован метод малого параметра для квазилинейной системы в квазипериодическом случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда науки МОН РК (№1–1–1.2–12(60)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харасахал В.Х.* Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Алматы: Наука, 1970. 200 с.

2. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1958. 492с.

3. *Умбетжанов Д.У., Сартабанов Ж.А.* О необходимом и достаточном условии многопериодичности решения одной системы уравнений в частных производных с одинаковой главной частью // Математика и механика. Алма-Ата, 1972. Вып. 7, ч. 2. С. 48-52.

4. *Сартабанов Ж.А.* Об одном способе изучения периодических решений урвнений в частных производных специального вида // Изв. АН КазССР. Сер. физ-мат. 1989. № 1. С. 42-48.

5. *Сартабанов Ж.А.* Условия периодичности решений дифференциальных систем с многомерным временем // Известия НАН РК. Сер. физ-мат. 2004. №3. С. 44-48.

6. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

Резюме

Квазисызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесінің квазипериодты шешімдерін зерттеудегі кіші параметр әдісінің негіздемесі келтірілген.

Summary

Happens to motivation of the method of small parameter in study of quasi-periodic solutions of the quasi-linear system of differential equations.

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, г. Актобе

Поступила 02.01.07г.