УДК 517.925.5:519.216

М. И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ

ОБ ОБРАТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ТРЕБУЕМОГО ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ

Рассматривается задача восстановления в классе стохастических дифференциальных уравнений типа Ито по заданным свойствам движения, которые зависят от части переменных. Определяется множество управлений, обеспечивающих необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия.

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых (ОДУ) [2, 3]. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в работе [3]. В работах [4–6] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений.

Постановка задачи. Пусть задана система дифференциальных уравнений типа Ито

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,t), \\ \dot{y} = R(x,y,t) + D(x,y,t)U + \sigma(x,y,t)\dot{\xi}. \end{cases} \quad (1)$$

Требуется определить управление u и коэффициент диффузии s по заданному интегральному многообразию:

$$\Lambda(t): \begin{cases} \lambda_1(x,t) = 0, \\ \lambda_2(x,y,t) = 0, \end{cases}$$

где

$$\lambda_1 \in C_{xt}^{22}, \ \lambda_2 \in C_{xyt}^{121}. \quad (2)$$

Иначе говоря, по заданным $f, R, D, \lambda_1, \lambda_2$ определим множество управлений u и множество матриц диффузий s так, чтобы множество (2) было интегральным многообразием системы уравнений (1).

Здесь $x \in R^n$, $y \in R^p$, $U \in R^r$, $\xi \in R^k$, $\lambda_1 \in R^{m_1}$, $\lambda_2 \in R^{m_2}$, $m_1 + m_2 = m$, $\{\xi_1(t,\omega),\dots,\xi_k(t,\omega)\}$ – система независимых винеровских процессов [7], заданная на некотором вероятностном пространстве (Ω, U, P).

Предполагается, что вектор-функции $f(x,y,t)$, $R(x,y,t)$, $D(x,y,t)$ непрерывны по t и липшицевы по x,y в области

$$U_H(\Lambda) = \\ = \{\gamma = (x^T, y^T)^T : \rho(\gamma, \Lambda(t)) < H, \quad H > 0\}, \quad (3)$$

что обеспечивает в (3) существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $(x(t)^T, y(t)^T)^T$ уравнения (1) с начальным условием $(x(t_0)^T, y(t_0)^T)^T = (x_0^T, y_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [7].

Указанная задача в случае отсутствия случайных возмущений ($s \equiv 0$) достаточно полно исследована в [3, с. 27], а стохастический случай задачи восстановления с исходным уравнением Ито второго порядка $\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + D(x,\dot{x},t)u + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi}$, $x \in R^n$ и заданным множеством вида $\Lambda(t)$: $\lambda(x,\dot{x},t) = 0$, $\lambda \in R^m$ в работе [6].

Предположим дополнительно, что $f \in C_{xyt}^{121}$.

Для решения поставленной задачи используется метод квазиобращения Р. Г. Мухарлямова [3], в основе которого лежит

Лемма 1 [3, с.12-13]. *Совокупность всех решений линейной системы*

$$H\vartheta = g, \quad H = (h_{\mu k}), \quad \vartheta = (\vartheta_k), \quad g = (g_\mu),$$
$$\mu = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,n}, \quad m \le n, \quad (4)$$

где матрица H имеет ранг равный m, определяется выражением

$$\vartheta = s[HC] + H^+ g. \quad (5)$$

Здесь s – произвольная скалярная величина, $[HC] = [h_1 \dots h_m \ c_{m+1} \dots c_{n-1}]$ есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; $H^+ = H^T\left(HH^T\right)^{-1}$, H^T – матрица, транспонированная к H.

Составим уравнения возмущенного движения в силу стохастического дифференцирования Ито [7]:

$$\ddot{\lambda}_1 = \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial t\partial x} f + \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial t\partial x} f + \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial x\partial x} f +$$

$$+ f^T \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial x\partial x} f + \frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\dot{f} =$$

$$= \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial t\partial x} f + \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial x\partial x} f + f^T \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial x\partial x} f +$$

$$+ \frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(R + DU_1 + \sigma\dot{\xi}) + \frac{\partial\lambda_1}{\partial x} S_1, \qquad (4)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{\partial\lambda_2}{\partial t} + \frac{\partial\lambda_2}{\partial x} f + \frac{\partial\lambda_2}{\partial y}(R + DU_2 + \sigma\dot{\xi}) + S_2, \qquad (5)$$

где $S_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y} : \sigma\sigma^T\right]$, $S_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial y\partial y} : \sigma\sigma^T\right]$.

Обозначим

$$G_1 = \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial t\partial x} f + \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial x\partial x} f + f^T \frac{\partial^2\lambda_1}{\partial x\partial x} f +$$

$$+ \frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} R + \frac{\partial\lambda_1}{\partial x} S_1,$$

$$G_2 = \frac{\partial\lambda_2}{\partial t} + \frac{\partial\lambda_2}{\partial x} f + \frac{\partial\lambda_2}{\partial y} R + S_2$$

и перепишем (4) и (5) в виде

$$\begin{cases} \ddot{\lambda}_1 = G_1 + \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}(DU_1 + \sigma\dot{\xi}), \\ \dot{\lambda}_2 = G_2 + \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y}(DU_2 + \sigma\dot{\xi}). \end{cases}$$

(6)

Введем произвольные функции Еругина [1]: соответственно m_1- и m_2-мерные вектор-функции A_1, A_2 и соответственно $(m_1 \times k)$ – и $(m_2 \times k)$ – матрицы B_1, B_2, обладающие свойством $A_1(0,0,x,y,t) \equiv 0$, $A_2(0,x,y,t) \equiv 0$, $B_1(0,0,x,y,t) \equiv 0$, $B_2(0,x,y,t) \equiv 0$, такие, что имеют место равенства

$$\begin{cases} \ddot{\lambda}_1 = A_1(\lambda_1, \dot{\lambda}_1, x, y, t) + B_1(\lambda_1, \dot{\lambda}_1, x, y, t)\dot{\xi}, \\ \dot{\lambda}_2 = A_2(\lambda_2, x, y, t) + B_2(\lambda_2, x, y, t)\dot{\xi}. \end{cases} \qquad (7)$$

На основе уравнений (6) и (7) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} DU_1 = A_1 - G_1, \\ \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y} DU_2 = A_2 - G_2, \end{cases} \qquad (8)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\sigma_1 = B_1, \\ \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y}\sigma_2 = B_2, \end{cases} \qquad (9)$$

из которых нужно определить управляющие параметры $\{U_1\}, \{U_2\}$ и коэффициенты диффузии $\{\sigma_1\}, \{\sigma_2\}$.

Обозначив через $H_1 = \frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} D$, $H_2 = \frac{\partial\lambda_2}{\partial y}$ и использовав метод квазиобращения из соотношений (8), определим множества управлений $\{U_1\}, \{U_2\}$ в виде

$$\begin{cases} U_1 = s_1[H_1 C_1] + (H_1)^+(A_1 - G_1), \\ U_2 = s_2[H_2 C_2] + (H_2)^+(A_2 - G_2) \end{cases} \qquad (10)$$

и коэффициенты диффузии $\{\sigma_1\}, \{\sigma_2\}$ в виде

$$\begin{cases} \sigma_{1i} = s_3[H_3 C_3] + (H_3)^+(B_{1i}), \\ \sigma_{2i} = s_4[H_4 C_4] + (H_4)^+(B_{2i}), \end{cases} \qquad (11)$$

где σ_{1i}, σ_{2i} являются i-ми столбцами соответственно матриц σ_1, σ_2; а B_{1i}, B_{2i} – i-е столбцы соответственно матриц B_1, B_2.

При этом множества $\{U_1\}$ и $\{\sigma_1\}$, определяемые формулой (10), (11), обеспечивают интегральность множества $\lambda_1(x,t) = 0$, а множества

$\{U_2\}$ и $\{\sigma_2\}$, определяемые также из формул (10), (11), обеспечивают интегральность множества $\lambda_2(x,y,t)=0$. Следовательно, для обеспечения интегральности как $\lambda_1(x,t)=0$, так и $\lambda_2(x,y,t)=0$ искомое множество управлений $\{U\}$ определим в виде

$$\{U\}=\{U_1\}\cap\{U_2\}, \qquad (12)$$

а искомое множество коэффициентов диффузии $\{s\}$ – в виде

$$\{\sigma\}=\{\sigma_1\}\cap\{\sigma_2\}. \qquad (13)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы система уравнений (1) имела заданное интегральное многообразие (2), необходимо и достаточно, чтобы множество управлений {U} удовлетворяло условию (12), а множество коэффициентов диффузии – условию (13).*

Скалярный случай. Рассматривается задача управления системой

$$\begin{cases} \dot{x}=g(x,y,t), \\ \dot{y}=\rho(x,y,t)+b(x,y,t)u+\gamma(x,y,t)\dot{\eta}, \end{cases} \qquad (14)$$

где $x\in R^1$, $y\in R^1$, η – скалярный винеровский процесс.

Требуется определить управление *u* и коэффициент диффузии *g* по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t):\begin{cases} \lambda_1(x,t)=0,\ \lambda_1\in R^1,\ \lambda_1\in C^{22}_{xt}, \\ \lambda_2(x,y,t)=0,\ \lambda_2\in R^1,\ \lambda_2\in C^{222}_{xyt}. \end{cases} \qquad (15)$$

Иначе говоря, по заданным *f*, *r*, *b*, λ_1, λ_2 определяется управление *u* и коэффициент диффузии g так, чтобы множество (15) было интегральным многообразием уравнений (14).

По правилу стохастического дифференцирования Ито [7] составляем уравнения возмущенного движения относительно множества L(t)

$$\ddot{\lambda}_1=\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial t\partial x}g+\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial x\partial x}g+g^T\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial x\partial x}g+$$

$$+\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}(\rho+bu_1+\gamma\dot{\eta})+\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\widetilde{S}_1, \qquad (16)$$

$$\dot{\lambda}_2=\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}+\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}g+\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}(\rho+bu_2+\gamma\dot{\eta})+\widetilde{S}_2, \qquad (17)$$

где $\widetilde{S}_1=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\gamma^2$, $\widetilde{S}_2=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial y^2}\gamma^2$.

Обозначим

$$g_1=\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial t\partial x}g+\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial x^2}g+\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial x^2}g^2+$$

$$+\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\rho+\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\widetilde{S}_1,$$

$$g_2=\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}+\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}g+\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}\rho+\widetilde{S}_2$$

и перепишем (16) и (17) в виде

$$\begin{cases} \ddot{\lambda}_1=g_1+\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial y}(bu_1+\gamma\dot{\eta}), \\ \dot{\lambda}_2=g_2+\dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y}(bu_2+\gamma\dot{\eta}). \end{cases} \qquad (18)$$

Введем произвольные скалярные функции Еругина a_1,a_2,b_1,b_2 со свойством $a_1(0,0,x,y,t)\equiv 0$, $a_2(0,x,y,t)\equiv 0$, $b_1(0,0,x,y,t)\equiv 0$, $b_2(0,x,y,t)\equiv 0$ такие, что имеет место

$$\begin{cases} \ddot{\lambda}_1=a_1(\lambda_1,\dot{\lambda}_1,x,y,t)+b_1(\lambda_1,\dot{\lambda}_1,x,y,t)\dot{\xi}, \\ \dot{\lambda}_2=a_2(\lambda_2,x,y,t)+b_2(\lambda_2,x,y,t)\dot{\xi}. \end{cases} \qquad (19)$$

На основе уравнений (18) и (19) имеем соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}Du_1=a_1-g_1, \\ \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y}bu_2=a_2-g_2, \end{cases}$$

(20)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial y}\gamma_1=b_1, \\ \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y}\gamma_2=b_2, \end{cases} \qquad (21)$$

из которых нужно определить управляющие параметры $\{u_1\},\{u_2\}$ и коэффициенты диффузии $\{\gamma_1\},\{\gamma_2\}$.

Из соотношений (20) определим управления

u_1, u_2 в виде

$$u_1 = (\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}b)^{-1}(a_1 - g_1), \quad (22)$$

$$u_2 = (\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}b)^{-1}(a_2 - g_2), \quad (23)$$

а из соотношений (21) – коэффициенты диффузии γ_1, γ_2 в виде

$$\gamma_1 = (\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y})^{-1}b_1, \quad (24)$$

$$\gamma_2 = (\frac{\partial\lambda_2}{\partial y})^{-1}b_2. \quad (25)$$

При этом u_1 и g_1, определяемые формулами (22), (24), обеспечивают интегральность множества $\lambda_1(x,t) = 0$, а параметры u_2 и g_2, определяемые равенствами (23), (25), обеспечивают интегральность множества $\lambda_2(x,y,t) = 0$. Приравняв u_1 к u_2 и g_1 к g_2, найдем соответственно их пересечения u и g, обеспечивающие интегральность L(t). Следовательно, для обеспечения интегральности как $\lambda_1(x,t) = 0$, так и $\lambda_2(x,y,t) = 0$ потребуем выполнения равенств

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}(a_1 - g_1) = \frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}(a_2 - g_2), \quad (26)$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}b_1 = \frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}b_2, \quad (27)$$

а искомые u и g определим в виде

$$u = (\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}b)^{-1}(a_1 - g_1), \quad (28)$$

$$\gamma = (\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y})^{-1}b_1. \quad (29)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы система уравнений (14) имела заданное интегральное многообразие (15), необходимо и достаточно, чтобы управляющий параметр и имел вид (28), а коэффициент диффузии g – вид (29) и выполнялись условия (26), (27).*

Таким образом, методом квазиобращения в сочетании с правилом стохастического дифференцирования сложной функции приведено решение одного из вариантов задачи восстановления дифференциальной системы по заданным свойствам движения в классе стохастических дифференциальных уравнений типа Ито. Построено множество управляющих параметров, обеспечивающее существование заданного интегрального многообразия. Полученные результаты распространяют на класс стохастических дифференциальных уравнений Ито известное в классе обыкновенных дифференциальных уравнений утверждение, доказанное в работе [3, с. 27-29].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную инте-гральную кривую // ПММ. 1952. Т. 10, вып. 16. С. 659-670.

2. *Галиуллин А.С.* Методы решения обратных задач динамики. М., 1986. 224 с.

3. *Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г.* Уравнения программных движений. М., 1986. 88 с.

4. *Тлеубергенов М.И.* Об обратной стохастической задаче динамики // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия “Прикладная математика и информатика”. М., 1999. № 1. С. 48-51.

5. *Тлеубергенов М.И.* Об обратной стохастической задаче замыкания // Доклады МН-АН РК. 1999. № 1. С. 53-60.

6. *Тлеубергенов М.И.* Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. М., 2001. Т. 37, № 5. С. 714-716.

7. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 632 с.

Резюме

Берілген қасиеттері бойынша айнымалы бөлігіне тәуелді Ито типтес стохастикалық дифференциалды теңдеулер класында қалпына келтіру есебі қарастырылады. Берілген интегралды көпбейненің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттарын қамтамасыз ететін басқару жиыны анықталады.

Summary

The restriction’s problem into the class of stochastic differential Ito’s equations by given properties of motion, which are depending from partial variables, are considered. The set of controls, which ensure the necessary and sufficient conditions of existence of given integral manifold, is defined.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 29.01.2007 г.