УДК 530.12

*Т. А. КОЖАМКУЛОВ, Г. Ж. МУРЗАГАЛИЕВ, А. Г.МУРЗАГАЛИЕВА*

# ОБ ЭФФЕКТЕ ЛЕНЗЕ-ТИРРИНГА В ОТО СОГЛАСНО МЕТРИКЕ КЕРРА

На основе лагранжиана и гамильтониана частицы в поле Керра находится доля потенциальной энергии взаимодействия спина ЦТ и момента орбитального движения частицы в приближении $\frac{1}{c^2}$. Ее изучение приводит к эффекту Лензе–Тирринга, полученному раньше другим путем.

Метрика Керра, записанная в 1967 г. в координатах Бойера–Линдквиста, исследовалась многими учеными [1]. Тем не менее интерес к этой метрике значительно возрос в связи с использованием этого решения во многих проблемах релятивистской астрофизики.

До опубликования работы Картера был известен только один существенный эффект, связанный с вращением масс в общей теории относительности, – эффект Лензе–Тирринга. Его иногда называют эффектом увлечения инерциальных систем, согласно которому любой вращающийся объект стремится вовлечь во вращение окружающее его пространство-время. Планета Земля при вращении тоже увлекает за собой пространство-время, но в очень малой степени. Однако для быстро вращающихся массивных объектов этот эффект становится заметнее, и если черная дыра образовалась из вращающейся звезды, то увлечение пространства-времени вблизи нее будет вполне ощутимым.

В 60-х годах XX в. было показано, что если масса умирающей звезды превышает три солнечных, ее сжатию не могут воспрепятствовать никакие физические силы. Следовательно, такая звезда должна катастрофически сжаться – сколлапсировать до объема, равного нулю, что приводит к появлению в пространстве-времени сингулярности.

При коллапсе напряженность силы тяготения над ее поверхностью становится настолько большой, что окружающее звезду пространство-время свертывается, и звезда исчезает из Вселенной, остается только исключительно сильно искривленная область пространства-времени.

Исследовать свойства черных дыр лучше всего, изучая движения в этих сильно искривленных областях пространства-времени объектов – малых тел (материальных точек) и лучей света.

В ряду таких важных задач находится и изучение движения пробных тел в поле Керра путем интегрирования уравнений геодезических линий или уравнения Гамильтона–Якоби. Оно берет начало с работы Картера, который показал, что переменные в соответствующих уравнениях Гамильтона–Якоби для движения пробных частиц разделяются и задача сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Целью данной работы является нахождение прецессии «плоскости» орбитального движения пробного тела вокруг вращающегося центрального тела согласно метрике Керра.

Гравитационное поле вращающегося коллапсара описывается аксиально-симметричной стационарной метрикой Керра:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g \cdot r}{\rho^2}\right) \cdot c^2 dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 -$$

$$-\left(r^2 + a^2 + \frac{r_g \cdot r}{\rho^2} \cdot a^2 \sin^2\theta\right) \cdot \sin^2\theta \cdot d\varphi^2 +$$

$$+ 2 \cdot \frac{r_g \cdot r}{\rho^2} \cdot a \sin^2\theta \cdot d\varphi \cdot c \cdot dt, \qquad (1)$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta;\ \Delta = r^2 + a^2 - r_g \cdot r$. Поле вращающегося центрального тела (ЦТ) не является сферически-симметричным. У него существует выделенное направление – ось вращения, которая совпадает с осью вращения ЦТ. Чтобы работать с решением Керра, необходимо выбрать такую систему координат, которая наиболее полно отражает геометрию вращающегося коллапсара. Сплющенные эллипсоидальные координаты подходят для описания решения Керра. Эта система координат имеет осевую симметрию. В центре системы расположено кольцо. Если посмотреть на центральную часть таких координат вдоль оси вращения, то координатные линии представляют собой окружности, а если вдоль экваториальной плоскости, то координатные линии выглядят как эллипсы.

В данной работе движение пробной частицы в гравитационном поле описывается лангранжианом, определяемым как полная производная по времени от функции действия:

$$L=\frac{-m_0^{\;2}c^2\rho^2\Delta}{\left[\left(r^2+a^2\right)^2-\Delta a^2\sin^2\theta\right]\dfrac{E}{c^2}+\dfrac{aQ}{c}r_g r},\quad (2)$$

где $Q$ – с одной стороны, постоянная разделения переменных, с другой – орбитальный момент импульса по $\varphi$.

Выражение (2) рассмотрим для двумерного движения в «плоскости» $(r,\varphi)$ в приближении $\dfrac{1}{c^2}$ при $\dfrac{v^2}{c^2}\pi\pi\ 1;\ \dfrac{a^2}{r^2}\pi\pi\ 1;\ \dfrac{r_g}{r}\pi\pi\ 1$:

$$L_1=-\frac{m_0^{\;2}c^4}{E}\left(1-\frac{r_g}{r}+\frac{aQr_gc}{Er^3}\right),\qquad (3)$$

где энергия частицы при $\theta=\pi/2$ равна

$$E=\frac{\sqrt{1-\dfrac{r_g}{r}}\,m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=const.\qquad (4)$$

Если подставить (4) в (3) и рассмотреть в приближении $\dfrac{v^2}{c^2}\pi\pi\ 1;\ \dfrac{r_g}{r}\pi\pi\ 1;\ \dfrac{a}{r}\pi\pi\ 1$, то

$$L_1=-m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{r_g}{r}+\right.$$

$$\left.+\frac{aQr_gc\left(1-v^2/c^2\right)^{\frac{1}{2}}}{m_0c^2\left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)\cdot r^3}\right]\approx-m_0c^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4}+\ldots\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{2}\frac{r_g}{r}+\frac{3}{8}\frac{r_g^{\;2}}{r^2}\right)\left[1-\frac{r_g}{r}+\frac{aQr_g}{m_0c^2r^3}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4}\right)\left(1+\frac{1}{2}\frac{r_g}{r}+\frac{r_g^{\;2}}{r^2}+\ldots\right)\right]\approx$$

$$\approx-m_0c^2\left[1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4}+\frac{1}{2}\frac{r_g}{r}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\frac{r_g}{r}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{r_g^{\;2}}{r^2}\right]\left[1-\frac{r_g}{r}+\frac{aQr_g}{m_0c^2r^3}\right]\approx$$

$$\approx-m_0c^2\left[1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{2}\frac{r_g}{r}+\frac{1}{4}\frac{r_g}{r}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4}+\frac{3}{8}\frac{r_g^{\;2}}{r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{aQr_g}{m_0c^2r^3}\right]=-m_0c^2+\mathrm{T}_0-\Pi_0-\frac{1}{2}\frac{\gamma\cdot m'm_0}{r}\frac{v^2}{c^2}+$$

$$+\frac{\mathrm{T}_0^{\;2}}{2m_0c^2}-\frac{3}{2}\frac{\Pi_0^{\;2}}{m_0c^2}-\frac{2\gamma\cdot M'Q}{c^2r^3}=L_0+L'.\quad (5)$$

Функция Лагранжа определяется с точностью до аддитивной постоянной, поэтому член $(-m_0c^2)$ можно отбросить. Выражение $L_0=\mathrm{T}_0-\Pi_0$ – ньютоновская функция Лагранжа, равная разности кинетической и потенциальной энергий; $L'$ – первое релятивистское приближение $\left(\dfrac{1}{c^2}\right)$. В этом приближении появляется слагаемое, выражающее спин-орбитальное взаимодействие, т.е. взаимодействие момента импульса собственного вращения ЦТ и орбитального момента импульса $Q$ частицы.

Подробнее остановимся на члене $(-\dfrac{2\gamma\cdot \mathrm{M}'Q}{c^2r^3})$ из (5).

Во-первых, это гравитационное взаимодействие, поскольку $\gamma$ – ньютоновская постоянная тяготения; во-вторых, энергия взаимодействия есть потенциальная энергия. Следовательно, поскольку в функцию Лагранжа она входит с отрицательным знаком, то

$$\delta\Pi=\frac{2\gamma\cdot\mathrm{M}'Q}{c^2r^3}.\qquad (6)$$

Эта доля потенциальной энергии, что совпадает с энергией в эффекте Лензе–Тирринга. В-третьих, $\vec{M}'$, $\vec{Q}$ векторные величины (аксиальные вектора). Выражение (6) показывает, что при $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ угол между ними равен нулю, т.е. они параллельны $\vec{M}' \uparrow\uparrow \vec{Q}$. С другой стороны,

$$\delta\Pi = \frac{2\gamma\left(\vec{M}'\vec{Q}\right)}{c^2 r^3}. \qquad (7)$$

Имеем в виду

$$\vec{Q} = [\vec{r} \times \vec{p}], \qquad (8)$$

где $Q$ – с одной стороны, постоянная разделения переменных, с другой – орбитальный момент импульса по $\varphi$.

Подставим (8) в (7) и, учитывая $\delta H = \delta\Pi$, получим

$$\delta H = \frac{2\gamma}{c^2 r^3}\left(\vec{M}' \cdot [\vec{r} \times \vec{p}]\right) = \frac{2\gamma}{c^2 r^3}\left(\vec{r} \cdot [\vec{p} \times \vec{M}']\right) =$$

$$= \frac{2\gamma}{c^2 r^3}\left(\vec{p} \cdot [\vec{M}' \times \vec{r}]\right). \qquad (9)$$

Отсюда

$$\frac{\partial(\delta H)}{\partial \vec{r}} = \frac{2\gamma}{c^2 r^3}[\vec{p} \times \vec{M}'],$$

$$\frac{\partial(\delta H)}{\partial \vec{p}} = -\frac{2\gamma}{c^2 r^3}[\vec{r} \times \vec{M}']. \qquad (10)$$

Если сравнить с системой канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}, \qquad \dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}. \qquad (11)$$

то получается следующее:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{2\gamma}{c^2 r^3}[\vec{M}' \times \vec{p}],$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{2\gamma}{c^2 r^3}[\vec{M}' \times \vec{r}]. \qquad (12)$$

Согласно (11) $\vec{r}, \vec{p}$ прецессируют с угловой скоростью

$$\vec{\Omega} = \frac{2\gamma}{c^2 r^3}\vec{M}'. \qquad (13)$$

Прецессия происходит вокруг момента импульса ЦТ $\vec{M}'$, так как $\vec{\Omega} \uparrow\uparrow \vec{M}'$.

Рассмотрим

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r} \times \vec{p}] = [\dot{\vec{r}} \times \vec{p}] + [\vec{r} \times \dot{\vec{p}}] =$$

$$= \frac{2\gamma}{c^2 r^3}\left\{\left[[\vec{M}' \times \vec{r}] \times \vec{p}\right] + \left[\vec{r} \times [\vec{M}' \times \vec{p}]\right]\right\} =$$

$$= \frac{2\gamma}{c^2 r^3}\left[\vec{M}' \times [\vec{r} \times \vec{p}]\right] = \frac{2\gamma}{c^2 r^3}[\vec{M}' \times \vec{Q}]. \qquad (14)$$

Согласно (14) орбитальный момент импульса прецессирует с угловой скоростью (13). Для этого $\vec{M}'$ и $\vec{Q}$ не должны быть коллинеарными, иначе их векторное произведение будет равно нулю. В нашей задаче, когда частица движется в экваториальной «плоскости», $\vec{M}' \uparrow\uparrow \vec{Q}$. Следовательно, прецессии нет. Для существования прецессии частица должна двигаться не в экваториальной «плоскости». Этот релятивистский эффект в приближении $\dfrac{1}{c^2}$ называется эффектом Лензе–Тирринга, который обусловлен спин-орбитальным взаимодействием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богородский А.Ф.* Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии. Киев: Киевский университет, 1962. 196 с.

2. *Кауфман У.* Космические рубежи теории относительности. М.: Мир, 1981. 350 с.

3. *Рябушко А.П.* Движение тел в общей теории относительности. Минск: Вышэйшая школа, 1979. 237 с.

4. *Шапиро И.* Экспериментальная проверка общей теории относительности. М.: Мир, 1982. С. 215-240.

**Резюме**

Керр өрісінде қозғалыстағы бөлшектің біз қорытып шығарған лагранжианы мен гамильтонианынан орталық дененің спині мен бөлшектің орбиталық қозғалысының моментінің $1/c^2$ жуықтауында байланыс энергиясынан бұрын басқа жолмен дәлелденген Лензе-Тирринг эффектісінің орын алатындығы көрсетіледі.

**Summary**

On a basis lagranzhian and hamiltonian of a particle in a Kerr's field there is a share potential of energy of interaction a spin and moment of orbital movement of a particle in approach. Its study results in effect Lense-Tirring, received earlier by other way.

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы*

*Поступила 3.04.07г.*