УДК 530.12

М. Е. АБИШЕВ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЕПЕРЫ В ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ШАРА

Показано, что трехмерный ортогональный репер, жестко связанный с пробным телом, движущемся в поле вращающегося шара, приходит во вращение, причем направление вращения определяется орбитальным и собственным угловыми моментами.

Как указано в работе*, корректная метрика первого приближения механики ОТО для вращающегося шара имеет вид

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U\left(1 + \frac{\xi_0}{m_0 c^2}\right) + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{4\gamma}{7 m_0 c^2}\left(\vec{S}_0 \vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0 \vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)\right] dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) + \frac{8}{c^2}\left(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3\right) dt, \qquad (1)$$

где

$$U = \frac{\gamma m_0}{r}, \quad \vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3}\left[\vec{r}\vec{S}_0\right], \quad \xi_0 = \frac{8}{3}T_0 + \frac{2}{3}\varepsilon_0. \qquad (2)$$

Здесь m_0 – масса шара, $\vec{S}_0$ – его угловой момент, $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$, T_0 – кинетическая энергия вращения тела, ε_0 – взятая с обратным знаком энергия взаимного притяжения частиц тела,

$$\left(\vec{S}_0 \vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0 \vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) = -\frac{S_0^2}{r^3} + \frac{3\left(\vec{r}\vec{S}_0\right)^2}{r^5}. \qquad (3)$$

Напомним, что метрика (1) получена, следуя Фоку, в гармонической системе координат.

* *Абдильдин М.М.* Проблема движения тел в общей теории относительности. Алматы, 2006. 152 с.

Далее рассмотрим вопрос о вращательном движении трехмерного ортогонального репера, жестко связанного с пробным телом с массой m, в поле вращающегося массивного жидкого шара, т.е. в метрике (1).

В начале составим Лагранжиан пробного тела

$$L=-mc\frac{ds}{dt}=-mc^2+\frac{mv^2}{2}+mU-\frac{mU^2}{2c^2}+$$
$$+\frac{3mUv^2}{2c^2}+\frac{mv^4}{8c^2}-\frac{4m(\vec U\vec v)}{c^2}+$$
$$+\frac{mU\xi_0}{m_0c^2}-\frac{2\gamma m}{7m_0c^2}\left(\vec S_0\vec\nabla\right)\left(\vec S_0\vec\nabla\frac{1}{r}\right). \qquad (4)$$

Импульс пробного тела

$$\vec p=\frac{\partial L}{\partial\vec v}=\left[1-\frac{1}{c^2}\left(3U+\frac{v^2}{2}\right)\right]m\vec v-\frac{4m}{c^2}\vec U. \qquad (5)$$

Разрешим это выражение относительно скорости пробного тела. Тогда

$$\vec v(\vec r,\vec p)=\left[1-\frac{1}{c^2}\left(3U+\frac{p^2}{2m^2}\right)\right]\frac{\vec p}{m}+\frac{2\gamma}{c^2r^3}\left[\vec S_0\vec r\right], \qquad (6)$$

т.е. скорость пробного тела рассматривается как функция канонически сопряженных переменных $\vec r$ и $\vec p$.

Теперь применяя гидродинамическую формулу

$$\vec\omega=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec v, \qquad (7)$$

для угловой скорости пробного тела или подвижной системы координат, жестко связанной с пробным телом, получаем выражение

$$\vec\omega=\frac{3\gamma m_0}{2mc^2r^3}\left[\vec r\vec p\right]+\frac{\gamma}{c^2r^5}\left[3\vec r\left(\vec r\vec S_0\right)-\vec S_0r^2\right]. \qquad (8)$$

Исследуем это выражение в следующих частных случаях:

1. Пусть при $t=0$ направления векторов $\vec r$, $\vec p$ и $\vec S_0$ совпадают ($\vec r\uparrow\uparrow\vec p\uparrow\uparrow\vec S_0$). Тогда

$$\vec\omega=\frac{2\gamma}{c^2r^3}\vec S_0. \qquad (9)$$

Отсюда видно, что, двигаясь по даже по оси вращения, пробное тело, и вместе с ним трехмерный ортогональный репер, приобретает вращение. Угол поворота

$$\Delta\psi=\frac{2\gamma S_0}{c^2}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{r^3}. \qquad (10)$$

Для света, точнее для плоской электромагнитной волны, движущейся вдоль оси вращения центрального тела, тройка векторов $\vec c$, $\vec E$ и $\vec H$, т.е. ортогональная тройка, также приходит во вращение. Поворот плоскости поляризации вокруг оси вращения или вокруг $\vec c$ будет (r = ct)

$$\Delta\psi=\frac{2\gamma S_0}{c^3}\int_{r_п}^{\infty}\frac{dr}{r^3}=\frac{4\gamma S_0}{c^3r_п^2}. \qquad (11)$$

2. Пусть $\left[\vec r\vec p\right]=\vec M\uparrow\uparrow\vec S_0$, где $\vec M$ - орбитальный момент. Тогда из (8) следует

$$\vec\omega=\frac{3\gamma m_0}{2mc^2r^3}\vec M-\frac{\gamma}{c^2r^3}\vec S_0. \qquad (12)$$

Угол поворота ортогональной тройки

$$\Delta\psi=\frac{3\gamma m_0M}{2mc^2r^3}\int\frac{dt}{r^3}-\frac{\gamma S_0}{c^2}\int\frac{dt}{r^3}. \qquad (13)$$

Резюме

Айналмалы шардың өрісінде қозғалатын сынақ денесіне қатаң байланған үшөлшемді ортогональ репер орбиталдық және меншікті моменттермен анықталатын бағытта айналатыны көрсетілген.

Summary

In the work rotation of three-dimensional orthogonal frame rigidly bound with probe body moving in rotated sphere field considered. It is shown, that rotating sense determined by orbital and eigen moments.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Поступила 13.03.07г.