УДК 517.938

С. А. АЙСАГАЛИЕВ, Д. Г. ШАНАЗАРОВ, А. РЫСКУЛОВ

К АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ

На основе оценки несобственных интегралов на множестве решений динамической системы разработан новый метод определения области абсолютной устойчивости регулируемых систем. Данный метод позволяет выделить более широкую область абсолютной устойчивости по сравнению с известными критериями.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения регулируемой системы вида

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \sigma = Sx, \quad x(0) = x_0, \quad t \in I = [0,\infty), \tag{1}$$

где A, B, S – постоянные матрицы порядков $n \times n, n \times m, m \times n$ соответственно, матрица A – гурвицева.

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1),...,\varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m) \mid$$
$$0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \le \mu_{0i}\sigma_i^2, \ \forall \sigma_i \in R^1, \ i = \overline{1,m}; \ \varphi(0) = 0\} \tag{2}$$

Для регулируемых систем с ограниченными ресурсами:

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi(\sigma) \in \Phi_0 / |\varphi_i(\sigma_i)| \le \varphi_i^*, \ \varphi_i^* = const > 0, \ 0 < \varphi_i^* < \infty \ \ i = \overline{1,m}\}. \tag{3}$$

Система (1) имеет единственное положение равновесия ($x_* = 0, \ \sigma_* = 0$), для любых $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ (либо $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$).

Определение 1. Тривиальное решение $x_* = 0$ системы (1)–(2) (либо (1)–(3)) абсолютно устойчиво, если матрицы A, $A + B\mu S$, $0 \le \mu \le \overline{\mu}_0$ гурвицевы, где $\mu = diag(\mu_1,...,\mu_m)$, $\overline{\mu}_0 = diag(\overline{\mu}_{01},...,\overline{\mu}_{0m})$,

$0 \le \mu_i \le \overline{\mu}_{0i}$, $i=\overline{1,m}$, и для всех $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$ (либо $\varphi(\sigma)\in\Phi_1$) предел $\lim\limits_{t\to\infty} x(t;0,x_0,\varphi)=0$, $\forall x_0$, $|x_0|<\infty$.

Определение 2. Критерием абсолютной устойчивости для системы (1)–(2) (либо (1)–(3)) называются алгебраические или другие соотношения, связывающие матрицы (A,B,S,μ_0), $\mu_0 = diag(\mu_{01},...,\mu_{0m})$, $\mu_{0i} \le \overline{\mu}_{01}$, $i=\overline{1,m}$, при выполнении которых тривиальное решение $x_* = 0$ абсолютно устойчиво.

Ставится задача: Найти критерий абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (3).

Вспомогательные леммы.

Лемма1. *Пусть матрица SB порядка m × m не особая,* $T_1 = diag(T_{11},T_{12},...,T_{1m})$, $T_2 = diag(T_{21},T_{22},...,T_{2m})$, $H_1 = H_1^*$ *- матрица порядка n × n. Тогда вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка несобственного интеграла*

$$I_1 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \{\omega^*(t)P_0\omega(t)+\omega^*(t)P_1x(t)+x^*(t)P_2x(t)\}dt \le \lambda_0 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma -$$

$$-\lim_{T\to\infty} x^*(T)\left[H_1 - \frac{1}{2}S^*T_2^+S\right]x(T) + x_0^*\left[H_1-\frac{1}{2}S^*T_2^+S\right]x_0,\quad \omega(t)=\dot\sigma(t),\ t\in I, \tag{4}$$

где матрицы P_0, P_1, P_2, T_2^+, постоянная λ_0, функция $\overline{\varphi}(\sigma)$ определяются следующим образом:

$$P_0 = (SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1} + \frac{1}{2}(SB)^{*-1}T_2 + \frac{1}{2}T_2(SB)^{-1}, \tag{5}$$

$$P_1 = -2(SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA - (SB)^{*-1}T_1S - T_2(SB)^{-1}SA - 2(SB)^{*-1}B^*H_1, \tag{6}$$

$$P_2 = A^*S^*(SB)^{*-1}T_1\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA + A^*S^*(SB)^{*-1}T_1S - 2\left[A-B(SB)^{*-1}SA\right]^*H_1. \tag{7}$$

$$T_2^+ = \begin{cases} 0, \text{ если } T_2\le 0, \\ \mu_0T_2, \text{ если } T_2>0, \end{cases}\qquad \overline{\varphi}(\sigma) = \begin{cases} \varphi(\sigma), \text{ если } T_2\le 0, \\ \varphi(\sigma)-\mu_0\sigma, \text{ если } T_2>0, \end{cases}$$

$$\lambda_0 = \begin{cases} \overline{\lambda}_0 = -\int_0^{\sigma(0)} \varphi^*(\sigma)T_2 d\sigma, \text{ если } T_2\le 0, \\ \overline{\overline{\lambda}}_0 = -\int_0^{\sigma(0)} \overline{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma, \text{ если } T_2>0. \end{cases}$$

Доказательство. Так как $\dot\sigma = S\dot x(t) = SAx(t)+SB\varphi(\sigma(t))$, $\dot\sigma = \omega(t)$, $t\in I$, матрица SB не особая, то

$$\varphi(\sigma(t)) = (SB)^{-1}\omega(t) - (SB)^{-1}SAx(t),\quad t\in I. \tag{8}$$

Из включения $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$ следует, что для любой диагональной матрицы $T_1\ge 0$ справедливо, что $\varphi^*(\sigma(t))T_1\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t)) - \varphi^*(\sigma(t))T_1\sigma(t)\le 0,\ \forall t,\ t\in I$. Пусть $T_2 = diag(T_{21},T_{22},...,T_{2m})$. Тогда верны следующие соотношения:

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \varphi^*(\sigma(t))T_2\dot\sigma(t)dt = \overline{\lambda}_0 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\varphi^*(\sigma)T_2 d\sigma \text{, если } T_2\le 0; \tag{9}$$

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \varphi^*(\sigma(t))T_2\dot\sigma(t)dt = \overline{\overline{\lambda}}_0 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\left[\varphi(\sigma)-\mu_0\sigma\right]^*T_2 d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\sigma^*(T)\mu_0T_2\sigma(T) - \frac{1}{2}\sigma^*(0)\mu_0T_2\sigma(0)\text{, если } T_2>0. \tag{10}$$

Для любой симметричной матрицы $H_1 = H_1^*$ порядка $n \times n$ верно равенство

$$-2\lim_{T\to\infty}\int_0^T \dot{x}(t)H_1x(t)dt = -\lim_{T\to\infty} x^*(T)H_1x(T) + x_0^*H_1x_0. \qquad (11)$$

Из соотношений (8)–(11) получим оценку (4). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1 и пусть, кроме того:*

1) Матрица θ порядка $m \times n$ такая, что $\theta B = 0$;

2) Матрица $H_2 = H_2^*$ порядка $m \times m$.

Тогда вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка несобственного интеграла

$$I_2 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left\{\omega^*(t)P_0\omega(t) + \omega^*(t)P_3x(t) + x^*(t)P_4x(t)\right\}dt \le \lambda_0 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma -$$

$$-\lim_{T\to\infty} x^*(T)\left[H_1 - \frac{1}{2}S^*T_2^+S - A^*\theta^*H_2S\right]x(T) + x_0^*\left[H_1 - \frac{1}{2}S^*T_2^+S - A^*\theta^*H_2S\right]x_0, \qquad (12)$$

где матрицы

$$P_3 = P_1 + H_2^*\theta A + (SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2S, \qquad (13)$$

$$P_4 = P_2 + A^{*2}\theta^*H_2S - A^*S^*(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2S. \qquad (14)$$

Доказательство леммы следует из оценки (4) и условия леммы $\theta B = 0$.

Лемма 3. *Пусть матрица SB не особая, $H_2 = H_2^*$ T_3, P, W – матрицы порядков $m \times m$, $m \times m$, $m \times m$, $m \times n$ соответственно. Тогда вдоль решения системы (1), (2) верно равенство*

$$I_3 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \Big\{\varphi^*(\sigma(t))P\left[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right] + \left[\omega(t) + Wx(t)\right]^*T_3\left[\omega(t) + Wx(t)\right] +$$

$$+ x^*(t)\left[\frac{1}{2}\left(\theta A^2 + S\right)^*H_2\left(\theta A^2 + S\right) + \frac{1}{2}\left(SA + \theta A\right)^*H_2\left(SA + \theta A\right)\right]x(t)\Big\}dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\omega^*(t)L_0\omega(t) + \omega^*(t)L_1x(t) + x^*(t)L_2x(t)\right]dt, \qquad (15)$$

где матрицы

$$L_0 = T_3 - (SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}, \qquad (16)$$

$$L_1 = 2T_3W + (SB)^{-1}PS + 2(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA, \qquad (17)$$

$$L_2 = W^*T_3W - A^*S^*(SB)^{*-1}PS + A^*S^*(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA + H, \qquad (18)$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\theta A^2 + S\right)^*H_2\left(\theta A^2 + S\right) + \frac{1}{2}\left(SA + \theta A\right)^*H_2\left(SA + \theta A\right). \qquad (19)$$

Лемма может быть доказана на основе тождества (8).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия лемм 1–3, и пусть, кроме того*

$$\mu_0 = \left[(SB)^*T_3(SB) - \frac{1}{2}T_2(SB) - \frac{1}{2}(SB)^*T_2\right]^{-1}(T_1 + P), \qquad (20)$$

$$2(SB)^{*-1}B^*H_1 + \left[(SB)^{*-1}(T_1 + P) - (SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*H_2\right]S - H_2^*\theta A +$$
$$2T_3(W + SA) - (SB)^{*-1}T_2SA = 0, \qquad (21)$$

$$A^*H_1 + H_1A = -\left(W + SA\right)^*T_3\left(W + SA\right) - H_3, \qquad (22)$$

$$H_3=\frac{1}{2}\left[A^{*2}\theta^* H_2\theta A+S^* H_2 S+A^* S^* H_2 SA+A^*\theta^* H_2\theta A\right]. \tag{23}$$

Тогда справедлива следующая оценка несобственного интеграла

$$\begin{aligned}I_3&=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left\{\varphi^*(\sigma(t))P\left[\sigma(t)-\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right]+\left[\omega(t)+Wx(t)\right]^* T_3\left[\omega(t)+Wx(t)\right]+\right.\\&\left.+x^*(t)Hx(t)\right\}dt\le\lambda_0+\lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\overline{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma-\\&-x^*(T)\left[H_1-\frac{1}{2}S^*T_2^+S-A^*\theta^* H_2 S\right]x(T)+x_0^*\left[H_1-\frac{1}{2}S^*T_2^+S-A^*\theta^* H_2 S\right]x_0,\end{aligned} \tag{24}$$

Для доказательства леммы необходимо показать равенство несобственных интегралов I_2 и I_3.

Лемма 5. *Если матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma)\in\Phi_1$, то верны оценки $|x(t)|\le c_0$, $|\dot x(t)|\le c_1$, $|\sigma(t)|\le c_2$, $|\dot\sigma(t)|\le c_3$ $\forall t$, $t\in I$, где $c_i=const>0$, $i=\overline{0,3}$. Кроме того, функции $x(t),\sigma(t),t\in I$ – равномерно непрерывны.*

Абсолютная устойчивость.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) Условия лемм 1–4;

2) Выполнены равенства (20)–(23), матрицы $P=P^*>0$, $T_3>0$, $H\ge 0$;

3) Матрицы A, $A+B\mu S$, $0\le\mu\le\overline{\mu}_0$, $\mu_0\le\overline{\mu}_0$ - гурвицевы;

4) Функция $\varphi(\sigma)\in\Phi_1$ непрерывна по σ, $\sigma\in R^m$.

Тогда положение равновесия системы (1), (3) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Поскольку выполнены условия лемм 1–4, то справедлива оценка (24), где матрицы $P=P^*\ge 0$, $T_3>0$, $H\ge 0$. Заметим, что $\varphi(\sigma)=k(\sigma)\sigma$, $k(\sigma)=diag(k_1(\sigma),...,k_m(\sigma))$, $0\le k(\sigma)<\mu_0$. Тогда $\sigma-\mu_0^{-1}\varphi(\sigma)=\sigma-\mu_0^{-1}k(\sigma)\sigma=\left[I_m-\mu_0^{-1}k(\sigma)\right]\sigma$, где $I_m-\mu_0^{-1}k(\sigma)>0$. Следовательно, при $P=P^*\ge 0$, произведение $\varphi^*(\sigma)P\left[\sigma-\mu_0^{-1}\varphi(\sigma)\right]=\sigma^*k(\sigma)P\left[I_m-\mu_0^{-1}k(\sigma)\right]\sigma\ge 0$, $\forall\sigma$, $\sigma\in R^m$. Так как матрица $T_3>0$, $H\ge 0$, то из оценки (24) имеем

$$\begin{aligned}&0\le\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left\{\varphi^*(\sigma(t))P\left[\sigma(t)-\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right]\right\}dt\le\\&\le\lambda_0+\lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\overline{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma-\lim_{T\to\infty}x^*(T)\Sigma x(T)+x_0^*\Sigma x_0,\end{aligned} \tag{25}$$

где матрица $\Sigma=H_1-\frac{1}{2}S^*T_2^+S-\frac{1}{2}A^*\theta^*H_2S-\frac{1}{2}S^*H_2\theta A$. Заметим, что $\int_0^{\sigma(T)}\overline{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma\le 0$, $\forall\sigma(T)\in R^m$, для любой диагональной матрицы $T_2>0$. Поскольку матрица A – гурвицева, $\varphi(\sigma)\in\Phi_1$, то функции $x(t)$, $\sigma(t)$, $\dot x(t)$, $\dot\sigma(t)$, $t\in I$ ограничены, $x(t)$, $\sigma(t)$, $t\in I$ – равномерно непрерывны. Из ограниченности $x(t)$, $\sigma(t)$, $t\in I$ следует, что $\lambda_0+\lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\overline{\varphi}^*(\sigma)T_2 d\sigma-$ $-\lim_{T\to\infty}x^*(T)\Sigma x(T)+x_0^*\Sigma x_0<\infty$. Теперь неравенство (25) запишется так

$$0\le\lim_{T\to\infty}\int_0^T V(\sigma(t))dt<\infty, \tag{26}$$

$V(\sigma(t)) = \varphi^*(\sigma(t))P\left[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right] = \sigma^*(t)k(\sigma(t))P\left[I_m - \mu_0^{-1}K(\sigma(t))\right]\sigma(t) > 0,\ V(0) = 0$,

$V(\sigma)$ – равномерно непрерывная функция по σ, $\sigma \in R^m$. Из (26), в силу равномерной непрерывности функции σ, $t \in I$, имеем $\lim_{T\to\infty}\sigma(t) = 0$. Так как $\varphi(0) = 0$, то $\lim_{T\to\infty}\varphi(\sigma(t)) = 0$. Тогда $\lim_{T\to\infty}x(t) = 0$, в силу гурвицевости матрицы A и автономности системы. Так как матрицы A, $A + B\mu S$, $0 \le \mu \le \bar{\mu}_0$, $\mu_0 \le \bar{\mu}_0$ – гурвицевы, $\lim_{t\to\infty}x(t;0,x_0,\varphi) = 0$, $\forall\varphi$, $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$, $\forall x_0$, $|x_0| < \infty$, то положение равновесия системы (1), (3) абсолютно устойчиво.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) Условия лемм 1–4;

2) Выполнены равенства (20)–(23), матрицы $P = P^* > 0$, $T_3 > 0$, $H \ge 0$;

3) Матрицы A, $A + B\mu S$, $0 \le \mu \le \bar{\mu}_0$, $\mu_0 \le \bar{\mu}_0$ *- гурвицевы;*

4) Функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$ *непрерывна по* σ, $\sigma \in R^m$.

Тогда $\lim_{T\to\infty}\left[\dot{\sigma}(t) + Wx(t)\right] = 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) Условия лемм 1–4;

2) Выполнены равенства (20)–(23), матрицы $P = P^* > 0$, $T_3 > 0$, $H = Q^*Q \ge 0$;

3) Матрицы A, $A + B\mu S$, $0 \le \mu \le \bar{\mu}_0$, $\mu_0 \le \bar{\mu}_0$ *– гурвицевы;*

4) Функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$ *непрерывна по* σ, $\sigma \in R^m$.

Тогда $\lim_{T\to\infty}Qx(t) = 0$.

Доказательство теорем 2, 3 аналогично доказательству теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айсагалиев С.А.* Теория регулируемых систем. Алматы: Қазақ университеті, 2000. 234 с.

2. *Айсагалиев С.А., Злобина Е.Б.* Динамика нелинейных регулируемых систем. Алматы: Қазақ университеті, 2006. 388 с.

3. *Айсагалиев С.А.* К теории регулируемых и фазовых систем // АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1987. №5. С. 10-18.

4. *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1969. №5. С. 38-48.

Резюме

Мақалада динамикалық жүйе шешімдерінің жиынындағы меншіксіз интегралдық бағалауы негізінде реттелген жүйелердің абсолютті орнықтылықтың анықталу аймағының жаңа әдісі құрастырылған. Белгілі критерийлермен салыстырғанда бұл әдіс кеңейтілген абсолютты орнықтылықты бөліп алуға мүмкіндік береді.

Summary

The new method of defining the domain of absolute stability of regular systems is been developed on the base of evaluation of improper integrals on the solution set of the given dynamic system. In compare with known criterions proposed method allows to obtain a wider domain of absolute stability.

КазНУ им. аль-Фараби

Поступила 19.07.07г.