УДК 517.956

С. А. АЛДАШЕВ

КРИТЕРИЙ ОДНОЗАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДАРБУ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Получен критерий однозначной разрешимости задачи Дарбу с отходом от характеристики, предложенный М. Н. Проттером, а также доказана теорема единственности решения сопряженной ей задачи.

п1. Постановка задач и результаты. Пусть D_β – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$, ограниченная конусами $\beta|x| = t$, $|x| = 1 - t$ и плоскостью t=0, где $|x|$ – длина вектора $x=(x_1,\ldots,x_m)$, а $0 < \beta = const \le 1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через S_β, S^1 и S соответственно.

В области D_β рассмотрим многомерное волновое уравнение

$$\Box u \equiv \Delta_x u - u_{tt} = 0, \qquad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1,\ldots,x_m$, $m \ge 2$.

В качестве многомерного аналога задачи Дарбу с отходом от характеристики рассмотрим следующую

Задача 1. Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D_\beta}) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_S = \tau(x), \ \ u\big|_{S_\beta} = \sigma(x) \qquad (2)$$

или

$$u_t\big|_S = \nu(x), \ \ u\big|_{S_\beta} = \sigma(x), \qquad (3)$$

предложенную М. Проттером в [1].

А также рассмотрим задачи Дарбу ($\beta = 1$) и Дирихле ($\beta < 1$).

Задача 2. Найти в области D_1 решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D}_1)\,\mathrm{I}\;C^2(D_1)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon\big|_S = 0, \ \ \upsilon\big|_{S^1} = 0,$$

или

$$\upsilon_t\big|_S = 0, \ \ \upsilon\big|_{S^1} = 0 .$$

Задача 3. Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D_\beta})\,\mathrm{I}\;C(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon\big|_{S \cup S_\beta \cup S^1} = 0.$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ldots,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,\ldots,\theta_{m-1},t,\ r \ge 0, 0 \le \theta_1 < 2\pi\,\pi,\ \ 0 \le \theta_i \le \pi\,\pi,$ $i = 2,3,\ldots,m-1$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1 \le k \le k_n, (m-2)!n!$

$k_n = (n+m-3)!(2n+m-2), \theta = (\theta_1,\ldots,\theta_{m-1}),$

$W_2^\lambda(S)$ – пространства Соболева, $\lambda = 0,1,\ldots,a$

$\widetilde{S} = \{(r,\theta) \in S, \varepsilon < r < (1+\varepsilon)/2\}$.

Имеет место ([2, с. 147]).

Лемма. Пусть $f(r,\theta) \in W_2^\lambda(S)$. Если $\lambda \ge m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{f}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (4)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $P \le \lambda - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\overline{\tau}_n^k(r), \overline{\nu}_n^k(r), \overline{\sigma}_n^k(r)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответственно функций $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta), \sigma(r,\theta)$.

Введем множества функций

$$B^{\lambda}(S)=\Big\{f(r,\theta): f\in W_2^{\lambda}(S), \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\Big(\left\|\bar f_n^k(r)\right\|^2_{C^2([0,1])}+$$

$$+\left\|\bar f_n^k(r)\right\|^2_{C([0,1])}\Big)\exp 2(n^2+n(m-2))<\infty, \lambda\geq m-1\Big\}.$$

Пусть

$$\tau(r,\theta)=r^2\tau^*(r,\theta), \nu(r,\theta)=r^2\nu^*(r,\theta),$$

$$\sigma(r,\theta)=r^2\sigma^*(r,\theta),\ \tau^*(r,\theta), \nu^*(r,\theta)\in B^{\lambda}(S),$$

$$\sigma^*(r,\theta)\in B^{\lambda}(\widetilde{S}).$$

Тогда справедлив следующий критерий

Теорема 1. Задача 1 однозначно разрешима $\Leftrightarrow \beta<1$.

Имеет место также

Теорема 2. В классе $C^1(\overline{D}_\beta)\cap C^2(D_\beta)$ решения задач 2 и 3 тривиальные.

п.2. Доказательство теоремы 1. Пусть $\beta<1$. Сначала рассмотрим задачу (1),(2). В сферических координатах уравнение (1) имеет вид ([2, с.143])

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u-u_{tt}=0, \qquad (5)$$

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\cdot\sin^{m-j-1}\theta_j}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1=1,\ \ g_j=(\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{j-1})^2, j>1.$$

Так как искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C(\overline{D}_\beta)\cap C^2(D_\beta)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (6)$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению. Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([2, с. 82]) получим

$$\overline{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\overline{u}_{nr}^k-\overline{u}_{ntt}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\overline{u}_n^k=0,$$

$$\lambda_n=n(n+m-2), \qquad (7)$$

$$k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\ldots.$$

Произведя замену переменной по формуле $\overline{u}_n^k(r,t)=r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)$ и положив затем $\xi=(r+t)/2$, $\eta=(r-t)/2$, из (7) будем иметь

$$u_{n\xi\eta}^k+\frac{\left[(m-1)(3-m)-4\lambda_n\right]}{4(\xi+\eta)^2}u_n^k=0. \qquad (8)$$

Тогда условие (2), с учетом леммы, для функций $u_n^k(\xi,\eta)$ перепишется в виде

$$u_n^k(\xi,\xi)=\tau_n^k(\xi),\ \ u_n^k(\xi,\alpha\xi)=\sigma_n^k(\xi),$$

$$0\leq\xi\leq 1/2, \qquad (9)$$

$$\tau_n^k(\xi)=(2\xi)^{(m-1)/2}\overline{\tau}_n^k(2\xi),$$

$$\sigma_n^k(\xi)=((1+\alpha)\xi)^{(m-1)/2}\overline{\sigma}_n^k((1+\alpha)\xi),$$

$$0<\alpha=\frac{1-\beta}{1+\beta}<1, k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\ldots.$$

Используя общее решение уравнения (8) (см. [3, с. 34]), нетрудно показать, что решение задачи Коши для уравнения (8) имеет вид

$$u_n^k(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta)+$$

$$+\frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\eta}^{\xi}\Bigg[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-$$

$$-\tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}\Bigg]d\xi_1, \qquad (10)$$

где

$$R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=$$

$$=P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$$ – функция Римана уравнения (8)([4]),а $P_\mu(z)$ – функция Лежандра, $\mu=n+(m-3)/2$,

$$\nu_n^k(\xi_1)=\frac{\partial u_n^k}{\partial N}\Big|_{\xi_1=\eta_1}=$$

$$=\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N^\perp}\cdot\frac{\partial u_n^k}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial N^\perp}\cdot\frac{\partial u_n^k}{\partial\xi_1}\right)\Bigg|_{\xi_1=\eta_1},$$ $N^\perp$ – нормаль

к прямой $\xi = \eta$ в точке (ξ_1, η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta \le \xi$.

Из (10) при $\eta = \alpha\xi$, используя краевое условие (9), получим интегральное уравнение первого рода

$$g_n^k(\xi) = \int_{\alpha\xi}^{\xi} \nu_n^k(\xi_1) P_\mu \left[\frac{\xi_1^2 + \alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1} \right] d\xi_1, 0 \le \xi \le 1/2,$$

$$\sqrt{2} \cdot g_n^k(\xi) = -\tau_n^k(\alpha\xi) - \tau_n^k(\xi) +$$

$$+ \frac{(\alpha-1)}{(\alpha+1)} \int_{\alpha\xi}^{\xi} \frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1} P_\mu^{'} \left[\frac{\xi_1^2 + \alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1} \right] d\xi_1 + 2\sigma_n^k(\xi),$$

которое дифференцированием сводится к следующему функционально-интегральному уравнению

$$\nu_n^k(\xi) - \alpha\nu_n^k(\alpha\xi) = f_n^k(\xi), \qquad (11)$$

где

$$f_n^k(\xi) =$$

$$= \int_{\alpha\xi}^{\xi} \nu_n^k(\xi_1) \frac{\xi_1^2 - \alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi_1\xi^2} P_\mu^{'} \left[\frac{\xi_1^2 + \alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1} \right] d\xi_1 + h_n^k(\xi),$$

$$h_n^k(\xi) = \frac{dg_n^k}{d\xi}.$$

В [5] показано, что функциональное уравнение (11) имеет единственное решение вида

$$\nu_n^k(\xi) = \frac{f_n^k(\xi) + \alpha f_n^k(\alpha\xi)}{1-\alpha^2} =$$

$$= \mu_n^k(\xi) + \int_{\alpha^2\xi}^{\xi} \nu_n^k(\xi_1) G_n(\xi, \xi_1) d\xi_1, \qquad (12)$$

где

$$\mu_n^k(\xi) = \frac{h_n^k(\xi) + \alpha h_n^k(\alpha\xi)}{1-\alpha^2}, \ \mu_n^k(\xi) \in C([0,1/2]),$$

$$G_n(\xi, \xi_1) = \qquad (13)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\xi_1^2 - \alpha^3\xi^2}{\alpha(1+\alpha)\xi_1\xi^2} P_\mu^{'} \left[\dfrac{\xi_1^2 + \alpha^3\xi^2}{\alpha(1+\alpha)\xi\xi_1} \right], \alpha^2\xi \le \xi_1 \le \alpha\xi, \\ \dfrac{\xi_1^2 - \alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi_1\xi^2} P_\mu^{'} \left[\dfrac{\xi_1^2 + \alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1} \right], \alpha\xi \le \xi_1 \le \xi. \end{cases}$$

Так как $\left| P_\mu^{'}(z) \right| \le C = const$ ([6,с.127]), то ядро $G_n(\xi, \xi_1)$ (13) допускает оценку

$$\left| G_n(\xi, \xi_1) \right| \le \frac{C}{(1+\alpha)\xi} = M. \qquad (14)$$

Решение интегрального уравнения (13), будем искать в виде ряда

$$\nu(\xi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \nu_\lambda(\xi), \qquad (15)$$

$$\nu_0(\xi) = \mu_n^k(\xi),$$

$$\nu_\lambda(\xi) = \int_{\alpha^2\xi}^{\xi} G_n(\xi, \xi_1) \nu_{\lambda-1}(\xi_1) d\xi_1, \lambda = 1,2,\ldots .$$

Из (14) получим следующие оценки $\left| \nu_0(\xi) \right| \le \max\limits_{[0,1/2]} \left| \mu_n^k(\xi) \right| = m$, $\left| \nu_1(\xi) \right| \le mM(1-\alpha)\xi$, $\left| \nu_2(\xi) \right| \le m \cdot M^2 \cdot \dfrac{\xi^2}{2}$ и вообще $\left| \nu_\lambda(\xi) \right| \le m \dfrac{(M\xi)^\lambda}{\lambda!}$.

Тогда для ряда (15) будем иметь

$$\left| \nu(\xi) \right| \le \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left| \nu_\lambda(\xi) \right| \le m \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} \left[\frac{C}{(1+\alpha)} \right]^\lambda =$$

$$= m \exp \frac{C}{1+\alpha}.$$

Таким образом, интегральное уравнение (12) а также (11) имеет единственное решение.

Следовательно, ряд

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} r^{(1-m)/2} u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta) \quad (16)$$

является решением задачи (1), (2), где функция $u_n^k(r,t), k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,\ldots$ находится из (10), в которой $\nu_n^k(\xi)$ определяется из уравнения (11).

Теперь рассмотрим задачу (1), (3) и ее решение, также будем искать в виде (6). В этом случае краевое условие (3) имеет вид

$$\left. \frac{\partial u_n^k}{\partial N} \right|_{\xi=\eta} = \nu_n^k(\xi), \quad u_n^k(\xi, \alpha\xi) = \sigma_n^k(\xi),$$

$$0 \le \xi \le 1/2, \qquad (17)$$

$$\nu_n^k(\xi) = \sqrt{2}(2\xi)^{(m-1)/2} \overline{\nu}_n^k(\xi), \ k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,\ldots .$$

Далее из (10) при $\eta = \alpha\xi$, с учетом (17), получим функционально- интегральное уравнение вида

$$\tau_n^k(\xi) + \tau_n^k(\alpha\xi) = g_n^k(\xi) + \int_{\alpha\xi}^{\xi} \tau_n^k(\xi_1) G_n(\xi,\xi_1) d\xi_1, \quad (18)$$

где

$$g_n^k(\xi) = 2\sigma_n^k(\xi) - \sqrt{2}\int_{\alpha\xi}^{\xi} \nu_n^k(\xi_1) P_\mu \times$$

$$\times \left[\frac{\alpha\xi^2 + \xi_1^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right] d\xi_1, g_n^k(\xi) \in C([0,1/2]),$$

$$G_n(\xi,\xi_1) = \frac{\alpha - 1}{(1+\alpha)\xi_1} P'_\mu \left[\frac{\xi_1^2 + \alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right].$$

Так как интегральный оператор, стоящий в правой части равенства (18) вполне непрерывен, то как показано в [7, с. 432] функциональное уравнение (18) имеет единственное решение.

Таким образом, функция (16) является решением задачи (1), (3), где $u_n^k(r,t), k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,...$ определяется из (10), при этом $\tau_n^k(\xi)$ находятся из (18).

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta), \sigma(r,\theta)$, аналогично [7, с. 14], можно показать, что полученное решение $u(r,\theta,t)$ в виде (16) принадлежит искомому классу.

Первая часть теоремы 1 доказана.

Пусть теперь задача 1 однозначно разрешима. Покажем, что $\beta < 1$. Предположим противное, т.е. $\beta = 1$.

В этом случае в [7,8] доказано, что задача 1 имеет бесчисленное множество решений.

Это приводит к противоречию нашему предположению.

Теорема 1 установлена. Из этой теоремы вытекает следующий критерий единственности решения задачи 1: однородная задача, соответствующая задаче 1, $u(x,t) \equiv 0 \Leftrightarrow \beta < 1$.

Отсюда следует, что при $\beta = 1$ не верность результатов работы [1], и для $\beta < 1$ – справедливость теоремы единственности решения задачи 1.

п.3. Доказательство теоремы 2. При $\beta = 1$ эта теорема установлена в [9,10]. Пусть $\beta < 1$. Сначала построим $u(r,\theta,t)$ – решение уравнения, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

$$u\big|_{S_\beta} = 0, k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,..., \quad (19)$$

$\bar{\tau}_n^k(r) \in V_0$, где V_0 – множество функций $\tau(r)$ из класса $C^2(0 < r < 1) \cap C^1(0 \le r \le 1)$. Очевидно, что множество V_0 плотно всюду в $L_2((0,1))$. Функцию $u(r,\theta,t)$ будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta). \quad (20)$$

Тогда для $u_n^k(\xi,\eta)$ получим уравнение (8) с краевыми условиями

$$u_n^k(\xi,\xi) = \tau_n^k(\xi), \quad u_n^k(\xi,\alpha\xi) = 0, \ 0 \le \xi \le 1/2,$$

$$k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,... . \quad (21)$$

Как показано в п.2, задача (8),(21) имеет единственное решение.

Таким образом, решение задачи (1), (19) в виде (20) построено, где $u_n^k(r,t)$, $k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,...$ определяются из (10), в которой $\nu_n^k(\xi)$ находятся из (11).

Из тождества Римана

$$\upsilon \Box u - u \Box \upsilon =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right)$$

по формуле Грина имеем

$$\int_{D_\beta} (\upsilon \Box u - u \Box \upsilon) dD_\beta = \int_{\partial D_\beta} \left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial N'} - u \frac{\partial \upsilon}{\partial N'}\right) dS, \quad (22)$$

где $\frac{\partial}{\partial N'} = \sum_{i=1}^{m} \cos(N^\perp, x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} - \cos(N^\perp, t) \frac{\partial}{\partial t}$ – конормаль к границе ∂D_β, а $N^\perp$ – внутренняя нормаль к ∂D_β.

Из (22), принимая во внимание граничные данные задачи 3 и тот факт, что на характеристическом конусе S^1 конормальная производная

$\frac{\partial}{\partial N'}$ совпадает с производной по касательному направлению ([11, с. 142]) получим

$$\int\limits_S \tau(r,\theta)\upsilon_t(r,\theta,0)dS = 0.$$

Отсюда, поскольку линейная оболочка системы функций $\left\{\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ плотна в $L_2(S)$, заключаем, что $\upsilon_t(r,\theta,0) = 0, \forall x \in S$.

Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши $\Box \upsilon = 0$, $\upsilon(x,0) = \upsilon_t(x,0) = 0$ будем иметь $\upsilon(x,0) = 0$, $\forall (x,t) \in D_\beta$.

Теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что для уравнения (1) задача Дирихле изучалась в [12, 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Protter M.H.* New voundary value problems for the wave equation and equations of mixed type // J. Rational Mech. and Analysis. 1954. V. 3, N 4. P. 435-446.

2. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.

3. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.

4. *Copson E.T.* // I. Rath. Mech. Anal. 1958. V. 1. P. 324-348.

5. *Литвинчук Г.С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.

6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функций. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.

7. *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Ғылым, 1994. 170 с.

8. *Алдашев С.А.* // ДАН СССР. 1982. Т. 265, № 6. С. 1289-1292.

9. *Алдашев С.А.* // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 2. С. 254-260.

10. *Алдашев С.А.* // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 64-68.

11. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4, ч. 2. М.: Наука, 1981. 550 с.

12. *Алдашев С.А.* // Доклады НАН РК. Алматы, 1995. № 1. С. 35-37.

13. *Алдашев С.А.* // Украинский матем. журнал. 1996. Т. 48, №5. С. 701-705.

Резюме

Көп өлшемді толқын теңдеуіне арналған сипаттамадан ауытқыған Дарбу есебінің шешімі бар және жалғыз екендік критерийі алынған.

Summary

In the work the criterion of the unique solvability of Darboux problem with deviation from the characteristics offered by M. H. Protter is obtained and the theorem of uniqueness for the solution of conjugate problem is proved.

Казахский национальный педагогический университет им. Абая

Поступила 27.03.07г.