УДК 517.2+519.6+531.1

Л. А. АЛЕКСЕЕВА

О ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭГМ-ПОЛЯ

Рассматривается ранее предложенная автором бикватернионная модель электро-гравимагнитного поля (А-поле), описывающая изменение ЭГМ-полей и зарядов-токов при их взаимодействии. Доказана инвариантность этих уравнений относительно группы преобразований Лоренца и ортогональных преобразований. Получены релятивисткие формулы преобразования плотностей массы и электрических зарядов, электрических и гравимагнитных токов, действующих электрических и гравимагнитных сил и их мощностей.

В работах [1, 2] с использованием алгебры бикватернионов на пространстве Минковского построена математическая модель электро-гравимагнитного (ЭГМ) поля. Для построения этих уравнений использовалась гамильтонова форма симметризованных уравнений Максвелла [3] и ее гракватернионная запись [4]. На основе *гипотезы о магнитном заряде*, проведена комплексификация поля с введением в уравнения Максвелла плотности массы. Это поле названо там *А-полем.* Действительная составляющая комплексного вектора напряженности А соответствует напряженности электрического поля, а мнимая – гравимагнитного. Его дивергенция в действительной части дает плотность электрических зарядов, в мнимой – плотность массы. Построенная замкнутая система уравнений взаимодействия А-полей является полевым аналогом трех известных в механике законов Ньютона для материальных тел. Эти уравнения описывают взаимное изменение плотностей масс, электрических зарядов, массовых и электрических токов под действием порождаемых ими ЭГМ-полей. Последние через заряды-токи, определяются системой уравнений Максвелла, которая также записывается в бикватернионной форме.

Следует отметить, что бикватернионные формы уравнений Максвелла ранее получали и использовали и другие авторы [5–7]. Они различаются в зависимости от того как, как вводятся бикватернионы напряженности, зарядов и токов ЭМ-поля, а также операции на их алгебрах. Однако эти формы использовались в основном лишь для построения и исследования решений уравнений Максвелла. Подобные формы также использовал В.В. Кассандров для построения своей модели единого поля [6] .

1. Бикватернионы на пространстве Минковского. Вводится линейное функциональное пространство комплексных кватернионов: $K(\mathbf{M}) = \{\mathbf{F} = f(x,\tau) + F(x,\tau)\}$, где f – комплекснозначные функции ($f = f_1 + if_2$) на пространстве Минковского $M = \{(\tau, x) : \tau \in R^1, x \in R^3\}$, а F – трехмерный вектор-функция с комплексными компонентами ($F = F_1 + iF_2$), f и F – локально интегрируемы и дифференцируемы на **М, К** - линейное пространство:

$$a\mathbf{F} + b\mathbf{G} = a(f+F) + b(g+G) =$$
$$= (af+bg) + (aF+bG), \qquad (1.1)$$

с известной операцией умножения ($\circ$):

$$\mathbf{F}\circ\mathbf{G} = (f+F)\circ(g+G) =$$
$$= (fg - (F,G)) + (fG + gF + [F,G]). \qquad (1.2)$$

Здесь (F,G) – обычное скалярное произведение векторов F и G (без комплексного сопряжения для второго вектора), а [F,G] – их векторное произведение.

Кватернион $\overline{\mathbf{F}} = \bar f + \bar F$, где черта обозначает соответствующие компонентам комплексно-сопряженные числа, называется *комплексно-сопряженным*. Если $\mathbf{F}\circ\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}}\circ\mathbf{F} = 1$, то кватернион назовем *унитарным.*

Кватернион $\mathbf{F}^* = \bar f - \bar F$ назовем *сопряженным*. Если $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}$, кватернион называется *самосопряженным.*

Скалярным произведением бикватернионов $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ назовем билинейную операцию $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 = f_1 f_2 + (F_1, F_2)$. *Нормой* бикватерниона $\mathbf{F}$

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(\mathbf{F}, \overline{\mathbf{F}})} = \sqrt{f \cdot \bar f + (F, \bar F)} = \sqrt{|f|^2 + \|F\|^2} \ .$$

Псевдонормой бикватерниона $\mathbf{F}$ назовем величину

$$\langle\mathbf{F}\rangle = \sqrt{f \cdot \bar f - (F, \bar F)} = \sqrt{|f|^2 - \|F\|^2} \ .$$

Кватернизируем пространство Минковского, вводя комплексно-сопряженные бикватернионы: $\mathbf{Z} = \tau + ix$, $\overline{\mathbf{Z}} = \tau - ix$. Легко видеть, что это самосопряженные кватернионы: $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^*$, $\overline{\mathbf{Z}} = \overline{\mathbf{Z}}^*$, и кроме того

$$\|\mathbf{Z}\| = \|\overline{\mathbf{Z}}\| = \sqrt{(\mathbf{Z}, \overline{\mathbf{Z}})}\,, \ \langle\mathbf{Z}\rangle^2 = \langle\overline{\mathbf{Z}}\rangle^2 = \mathbf{Z}\circ\overline{\mathbf{Z}} \,. \qquad (1.3)$$

В [3] введены дифференциальные кватернионные операторы:

$$\mathbf{D}^+ = \partial_\tau + i\nabla, \qquad \mathbf{D}^- = \partial_\tau - i\nabla, \qquad (1.4)$$

где $\nabla = grad = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, названные *взаимными комплексными градиентами.* Заметим, что в смысле выше данных определений каждый из них можно назвать *самосопряженным* оператором: $(\mathbf{D}^-)^* = \mathbf{D}^-$, $(\mathbf{D}^+)^* = \mathbf{D}^+$. Их действие на K определено как в алгебре кватернионов:

$$\mathbf{D}^+\mathbf{F} = (\partial_\tau + i\nabla)\circ(f + F) =$$
$$= (\partial_\tau f - i(\nabla, F) + \partial_\tau F + i\nabla f + i[\nabla, F], \qquad (1.5)$$
$$\mathbf{D}^-\mathbf{F} = (\partial_\tau - i\nabla)\circ(f + F) =$$
$$= (\partial_\tau f + i\, div\, F) + \partial_\tau F - i grad\, f - i\, rot\, F \,.$$

Их суперпозиция обладает полезным свойством:

$$\mathbf{D}^-\left(\mathbf{D}^+\mathbf{F}\right) = \mathbf{D}^+\left(\mathbf{D}^-\mathbf{F}\right) = \left(\mathbf{D}^-\circ\mathbf{D}^+\right)\mathbf{F} = \Box\mathbf{F}, \qquad (1.6)$$

где $\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \Delta$ – волновой оператор. В частности, используя его можно решать бикватернионные дифференциальные уравнения вида

$$\mathbf{D}^{\pm}\mathbf{K} = \mathbf{G} \Rightarrow \Box\mathbf{K} = \mathbf{D}^{\mp}\mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{K} = \mathbf{D}^{\mp}\mathbf{G} * \psi\,, \quad (1.7)$$

где в операции свертки стоит фундаментальное решение волнового уравнения $\psi(\tau, x)$: $\Box\psi = \delta(\tau, x)$, если такая свертка существует. В частности, для задач с начальными по времени условиями удобно использовать $\psi = (4\pi\|x\|)^{-1}\delta(\tau - \|x\|)$ – простой слой на световом конусе. Действительно, легко видеть, что

$$\mathbf{D}^{\pm}\mathbf{K} = \mathbf{D}^{\pm}\mathbf{D}^{\mp}\left(\mathbf{G} * \psi\right) = \Box\left(\mathbf{G} * \psi\right) =$$

$$= \left(\mathbf{G} * \Box\psi\right) = \mathbf{G} * \delta(\tau)\delta(x) = \mathbf{G}\,.$$

Заметим, что фундаментальные решения находятся с точностью до решения однородного волнового уравнения, поэтому в зависимости от свойств искомого решения, нужно использовать различные фундаментальные решения.

2. Преобразование Лоренца на M. Рассмотрим самосопряженные кватернионы вида

$$\mathbf{U} = ch\theta + iesh\theta\,,\ \overline{\mathbf{U}} = ch\theta - iesh\theta\,,$$

$$\|e\| = 1\,. \quad (2.1)$$

Легко проверить, что они унитарные: $\mathbf{U} \circ \overline{\mathbf{U}} = \overline{\mathbf{U}} \circ \mathbf{U} = 1$, и самосопряженные: $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{*}$, $\overline{\mathbf{U}} = \overline{\mathbf{U}}^{*}$.

Лемма 2.1. *Классическое преобразование Лоренца* $L : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}'$ *на пространстве Минковского имеет следующий вид:*

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{U} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{U}\,,\ \ \mathbf{Z} = \overline{\mathbf{U}} \circ \mathbf{Z}' \circ \overline{\mathbf{U}}\,. \quad (2.2)$$

Доказательство. Простым вычислением (2.2) получим для скалярной и векторной частей соотношения:

$$\tau' = \tau\, ch2\theta + (e, x)sh2\theta,$$

$$x' = x + \tau esh2\theta + 2e(e, x)sh^{2}\theta\,, \quad (2.3)$$

$$\tau = \tau'\, ch2\theta - (e, x')sh2\theta,$$

$$x = x' - \tau' esh2\theta + 2e(e, x')sh^{2}\theta\,.$$

Если вести обозначения: $ch2\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^{2}}}$, $sh2\theta = \dfrac{v}{\sqrt{1 - v^{2}}}$, $|v| < 1$, то, подставляя их в (2.3), получим известное преобразование Лоренца:

$$\tau' = \frac{\tau + v(e, x)}{\sqrt{1 - v^{2}}}, \quad x' = (x - e(e, x)) + \frac{e(e, x) + v\tau}{\sqrt{1 - v^{2}}}\,;$$

$$\tau = \frac{\tau' - v(e, x)}{\sqrt{1 - v^{2}}}, \quad x = (x' - e(e, x)) + \frac{e(e, x') + v\tau'}{\sqrt{1 - v^{2}}}, \quad (2.4)$$

которое соответствует движению системы в направлении вектора e с безразмерной скоростью v.

Легко видеть, что, в силу (2.2) и ассоциативности произведения, сохраняется псевдонорма: $\langle \mathbf{Z}' \rangle^{2} = \mathbf{U} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{U} \circ \overline{\mathbf{U}} \circ \overline{\mathbf{Z}} \circ \overline{\mathbf{U}} = \langle \mathbf{Z} \rangle^{2}$. Лемма доказана.

Аналогично, с помощью сопряженных кватернионов:

$$\mathbf{W} = \cos\varphi + e\sin\varphi\,,\ \mathbf{W}^{*} = \cos\varphi - e\sin\varphi\,,$$

$$\|e\| = 1\,, \quad (2.5)$$

можно записать группу преобразований на **M,** ортогональных на векторной части **Z.** Далее будем обозначать группу таких преобразований на **M** как обычно принято O_3. Легко проверить, что эти кватернионы тоже взаимно обратные: $\mathbf{W} \circ \mathbf{W}^{*} = \mathbf{W}^{*} \circ \mathbf{W} = 1$.

Лемма 2.2. *Ортогональные преобразования* O_3: $Z \to Z'$ *имеют следующий вид:*

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{W} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{W}^{*}\,,\ \mathbf{Z} = \mathbf{W}^{*} \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{W}\,. \quad (2.6)$$

Доказательство. Простым вычислением в (2.6) получим для скалярной и векторной частей соотношения:

$$\tau' = \tau, \quad (2.7)$$

$$x' = sin2\varphi[e, x] + cos2\varphi(x - e(e, x)) + e(e, x),$$

$$\tau = \tau', \quad (2.8)$$

$$x = -sin2\varphi[e, x'] + cos2\varphi(x' - e(e, x')) + e(e, x').$$

Легко видеть, что это поворот пространства R^{3} вокруг вектора e на угол 2φ. Время при этом не меняется. Очевидно, что это преобразование сохраняет норму и псевдонорму **Z**:

$$(\tau'^2 - \|x'\|^2) = \mathbf{Z}' \circ \overline{\mathbf{Z}}' = \mathbf{W} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{W}^* \circ \mathbf{W} \circ \overline{\mathbf{Z}} \circ \mathbf{W}^* =$$
$$= \mathbf{W} \circ \mathbf{Z} \circ \overline{\mathbf{Z}} \circ \mathbf{W}^* = (\tau^2 - \|x\|^2).$$

Так как $\tau' = \tau$, отсюда следует, что также $\|\mathbf{Z}'\| = \tau'^2 + \|x'\|^2 = \tau^2 + \|x\|^2 = \|\mathbf{Z}\|$.

Следствие. Из этих двух лемм получим, что преобразование Лоренца на М можно определить как преобразование вида:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{W} \circ \mathbf{U} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{U}^* \circ \mathbf{W}^*,$$
$$\mathbf{Z} = \overline{\mathbf{U}}^* \circ \mathbf{W}^* \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{W} \circ \overline{\mathbf{U}},$$

или, вычисляя

$$\mathbf{L} = \mathbf{W} \circ \mathbf{U} = ch(\theta - i\varphi) - iesh(\theta - i\varphi), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{L}^* = \overline{\mathbf{U}}^* \circ \mathbf{W}^* = ch(\theta + i\varphi) + iesh(\theta + i\varphi),$$

как

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{L} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{L}^*, \ \mathbf{Z} = \mathbf{L}^* \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{L}, \quad (2.10)$$

где единичный вектор e определяет направление движения новой системы координат, а остальные параметры скорость движения и угол поворота, как показано выше.

Легко видеть, что (2.9) коммутативно.

3. Бикватернионы А-поля. В [3, 1] введены бикватернионы A-поля**:** $\mathbf{\Phi} = i\phi - \Phi$ *-потенциал,* $\mathbf{A}$=0+A *напряженность***,** $\Xi = W + iP$ *- энергия-импульс,* $\mathbf{\Theta} = i\rho + J$ *заряд –ток.* Здесь A – комплексный вектор напряженности электро-гравимагнитного поля (ЭГМ-поля):

$$A = A^E + iA^H \quad \sqrt{\varepsilon}\ E + i\sqrt{\mu}\ H, \quad (3.1)$$

где ε, μ – константы электрической проводимости и магнитной проницаемости, E, H – напряженности электрического и гравимагнитного поля. Потенциальная часть вектора H описывает напряженность гравитационного поля, а вихревая – магнитного. Плотность заряда **А**-поля ρ выражается через плотность электрического заряда (ρ^E) и плотность массы (ρ^H):

$$\hat{\rho} = div \ \ A \quad \varepsilon^{-1/2}\rho^E - i\mu^{-1/2}\rho^H,$$

$$\rho^E = \varepsilon\ divE, \ \ \rho^H \quad -\mu\ divH. \quad (3.2)$$

J – ток выражается через электрические (J^E) и гравимагнитные (J^H) токи формулой:

$$J = J^E - iJ^H \quad \sqrt{\mu}\ j^E - i\sqrt{\varepsilon} \quad j^H, \quad (3.3)$$

Используя гамильтонову форму уравнений Максвелла [2], симметризованую систему уравнений Максвелла из 8 уравнений можно записать в виде одного уравнения:

$$\mathbf{D}^+ \mathbf{A} + \mathbf{\Theta} = 0, \quad (3.4)$$

которое будем называть *уравнением* А*-поля*.

Кватернионы А-поля связаны следующими соотношениями:

$$\Xi = 0,5\,\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A} = 0,5(\overline{A}, A) - 0,5[A, \overline{A}]. \quad (3.5)$$

Если потенциал $\mathbf{\Phi}$ удовлетворяет лоренцевой калибровке: $\partial_\tau \phi - div\,\Phi = 0$, то

$$\mathbf{D}^- \Phi = grad\,\phi - \partial_\tau \Phi + irot\,\Phi = \mathbf{A} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \mathbf{W}\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Theta} = 0, \quad (3.7)$$
$$\mathbf{W}\mathbf{A} = -\mathbf{D}^-\mathbf{\Theta}$$

$$-i(\partial_\tau \rho + divJ) - \nabla\rho - \partial_\tau J + i\,rot\,J. \quad (3.9)$$

Из скалярной части последнего уравнения получаем *закон сохранения заряда*:

$$\partial_\tau \rho + divJ = 0. \quad (3.10)$$

Уравнение А-поля (3.4), используя (1.7), позволяет определять заряды и токи, если известна его напряженность и обратно, по заданным зарядам токам находить напряженность поля как решение определенных краевых задач. Т.е. они представляют собой единую систему “вещество-поле”, взаимно-порождающие друг друга.

4. Уравнения взаимодействия полей. В [1] рассматриваются заряды-токи $\mathbf{\Theta}, \mathbf{\Theta}'$ и соответствующие им два поля $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$, которые описываются уравнением Максвелла (3.4). Для описания их взаимодействия введены бикватернионы *мощности-силы*

$$\mathbf{F} = M - iF \quad -\mathbf{\Theta} \circ \mathbf{A}' = -(i\rho + J) \circ A' =$$
$$(A', J) - i\rho A' + [A', J], \quad (4.1)$$

$$\mathbf{F}' = M' - iF' = -\mathbf{\Theta}' \circ \mathbf{A} \quad -(i\rho' + J') \circ A$$
$$= (A, J') - i\rho' A + [A, J],$$

которые описывают воздействие одного поля на заряды-токи другого.

Для определения изменения зарядов-токов предлагается система уравнений, в основе которой лежит гипотеза, что изменение зарядов-токов, которое описывается их комплексным градиентом, происходит в “направлении” силы, действующей со стороны поля других зарядов-токов. Она имеет следующий вид[1]:

$$\kappa\ \mathbf{D}^{+}\mathbf{\Theta}+\mathbf{\Theta}\circ\mathbf{A}'=0,$$

$$\kappa\ \mathbf{D}^{+}\mathbf{\Theta}'+\mathbf{\Theta}'\circ\mathbf{A}=0, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{\Theta}\circ\mathbf{A}'=-\mathbf{\Theta}'\circ\mathbf{A}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{D}^{+}\mathbf{A}+\mathbf{\Theta}=\mathbf{0},\ \ \mathbf{D}^{+}\mathbf{A}'+\mathbf{\Theta}'=\mathbf{0}, \quad (4.4)$$

где, в связи с размерностью, введена константа κ.

Уравнения (4.2) соответствуют второму закону Ньютона, (4.3) – третьему. Вместе с уравнениями Максвелла для A-полей и токов (4.4) они дают замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений для их определения

Скалярная и векторная часть уравнений (4.2) дает уравнения, которые названы *уравнением трансформации* зарядов-токов под действием внешнего поля. Так для первого уравнения имеем:

$$i\kappa\left(\partial_\tau\rho-divJ\right)=M,$$

$$i\kappa\left(\partial_\tau J+i\,rot\,J+\nabla\rho\right)=F. \quad (4.5)$$

Откуда для мнимой и действительной части имеем:

$$\kappa\left(\sqrt{\varepsilon}\,\partial_\tau j^H-\sqrt{\mu}\,rot\,j^E-\frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla\rho^H\right)=$$

$$=\rho^E E'+\rho^H H'+j^E\times B'-j^H\times D', \quad (4.6)$$

$$\kappa\left(\sqrt{\mu}\,\partial_\tau j^E+\sqrt{\varepsilon}\,rot\,j^H-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\nabla\rho^E\right)= \quad (4.7)$$

$$c\left(\rho^E B'-\rho^H D'\right)+c^{-1}\left(E'\times j^E+H'\times j^H\right).$$

Эта система уравнений является полевым аналогом второго закона Ньютона. Если внешнее A’-поле известно, то вместе с законом сохранения зарядов (3.9) она позволяет найти заряды-токи A-поля. Например, в случае, когда одно из полей намного мощнее другого ($\|A'\|>>\|A\|$), его изменением можно пренебречь и считать A’ заданным.

Заметим, что собственное взаимодействие зарядов и токов A-поля определяется системой уравнений Максвелла, которая незамкнута. В отсутствии внешних полей ($\mathbf{A}'=\mathbf{0}$), она замыкается уравнением свободных зарядов-токов (*свободного поля*):

$$\mathbf{D}^{+}\mathbf{\Theta}=\mathbf{0}. \quad (4.8)$$

Инвариантность уравнений Максвелла (4.4) относительно группы преобразований Лоренца и ортогональных преобразований хорошо известна. Покажем инвариантность уравнений (4.2), (4.3) относительно этих преобразований.

5. Инвариантность уравнения трансформации. Рассмотрим, как меняются уравнения трансформации при действии преобразовании Лоренца. Для этого определим, как преобразуются взаимные комплексные градиенты бикватернионов при преобразованиях Лоренца L, переводящих $\mathbf{Z}=\tau+ix$ в $\mathbf{Z}'=\tau'+ix'$. Обозначим

$$\nabla'=\left(\frac{\partial}{\partial x'_1},\frac{\partial}{\partial x'_2},\frac{\partial}{\partial x'_3}\right).$$

Лемма 5.1. *Если* $\mathbf{Z}'=\mathbf{L}\circ\mathbf{Z}\circ\mathbf{L}^*$, *то*

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau'}\pm i\nabla'\right)=\mathbf{L}^*\circ\left(\frac{\partial}{\partial\tau'}\pm i\nabla'\right)\circ\mathbf{L},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\pm i\nabla\right)=\mathbf{L}\circ\left(\frac{\partial}{\partial\tau'}\pm i\nabla'\right)\circ\mathbf{L}^*. \quad (5.1)$$

Доказательство. Расписывая преобразование Лоренца (2.10) для скалярной и векторной части, получим (например, для верхнего знака):

$$\tau'=\tau\,ch2(\theta+i\varphi)+(e,x)sh2(\theta+i\varphi), \quad (5.2)$$

$$x'=x+\tau e sh2(\theta+i\varphi)+2e(e,x)sh^2(\theta+i\varphi),$$

$$\tau=\tau'\,ch2(\theta-i\varphi)-(e,x')sh2(\theta-i\varphi), \quad (5.3)$$

$$x=x'-\tau' e sh2(\theta-i\varphi)+2e(e,x')sh^2(\theta-i\varphi).$$

Отсюда, используя правила дифференцирования, имеем

$$\partial_{\tau'}=ch\left(2(\theta-i\varphi)\right)\partial_\tau-sh\left(2(\theta-i\varphi)\right)(e,\nabla),$$

$$\nabla'=-esh\left(2(\theta-i\varphi)\right)\partial_\tau+$$

$$+\left\{\nabla+2esh^2\left(\theta-i\varphi\right)(e,\nabla)\right\}. \quad (5.4)$$

Эти соотношения совпадают с (5.3) при замене $\tau'\to\partial_\tau$, $x'\to\nabla$, что соответствует первой формуле (5.1). Аналогично доказывается вторая формула леммы.

[1] В отличие от [1], здесь изменен знак у комплексного градиента в (4.2). О причине см. в заключении.

Теорема 5.1. *При действии преобразования Лоренца на **M** уравнения трансформации сохраняют вид:*

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau'}+i\nabla'\right)\mathbf{\Theta}'=\mathbf{F}', \qquad (5.5)$$

где

$$\mathbf{\Theta}'=\mathbf{L}^*\circ\mathbf{\Theta}\circ\mathbf{L},\quad \mathbf{F}'=\mathbf{L}^*\circ\mathbf{F}\circ\mathbf{L}\ , \qquad (5.6)$$

что эквивалентно

$$\rho'=\rho' ch2(\theta-i\varphi)-i(e,J)sh2(\theta-i\varphi), \qquad (5.7)$$

$$J'=J-i\rho e sh2(\theta-i\varphi)+2e(e,J)sh^2(\theta-i\varphi),$$

$$M'=M\,ch2(\theta-i\varphi)+i(e,F)sh2(\theta-i\varphi), \qquad (5.8)$$

$$F'=F+iMesh2(\theta-i\varphi)-2e(e,F)sh^2(\theta-i\varphi).$$

Доказательство. Следуя лемме 5.1, используя ассоциативность произведения, получим

$$\mathbf{D}^+\mathbf{\Theta}=\left(\mathbf{L}\circ\mathbf{D}'^+\circ\mathbf{L}^*\right)\mathbf{\Theta}=\left(\mathbf{L}\circ\mathbf{D}'^+\right)\left(\mathbf{L}^*\circ\mathbf{\Theta}\right)=\mathbf{F}\Rightarrow$$

$$\left(\mathbf{L}\circ\mathbf{D}'^+\right)\left(\mathbf{L}^*\circ\mathbf{\Theta}\right)=\mathbf{F}\Rightarrow\ \mathbf{D}'^+\left(\mathbf{L}^*\circ\mathbf{\Theta}\right)=\mathbf{L}^*\circ\mathbf{F}.$$

Умножая последнее равенство на **L** справа и используя ассоциативность кватернионного произведения получим формулы (5.5) и (5.6) теоремы.

Определяя скалярную и векторную часть соответствующих бикватернионов (5.6), получим соотношения (5.7) для плотностей зарядов и токов и (5.8) для мощности и силы. Теорема доказана.

Если $L=W$ – ортогональное преобразование, то получаем обычный при ортогональных преобразованиях пересчет координат векторной части бикватернионов. При этом скалярные части бикватернионов – плотность заряда и массы и мощность действующих электрических и гравимагнитных сил не меняются.

Если $L=U$ – классическое преобразование Лоренца (2.2), то из (5.6), с учетом (2.4), следует:

$$\rho'=\rho\frac{1+v^2}{1-v^2}-i(e,J)\frac{2v}{1-v^2},$$

$$J'=J+e(e,J)\frac{2v^2}{1+v^2}-i\rho\quad e\frac{v}{1+v^2}, \qquad (5.9)$$

$$M'=M\frac{1+v^2}{1-v^2}+2i(e,F)\frac{v}{1-v^2},$$

$$F'=F+2iM\,e\frac{v}{1-v^2}-2e(e,F)\frac{v^2}{1-v^2}. \qquad (5.10)$$

Эти соотношения распишем отдельно для действительной и мнимой составляющей зарядов и токов, с учетом введенных в п.3 обозначений. Из действительной части получим формулы преобразования Лоренца для плотностей электрического заряда и электрического тока:

$$\rho'^E=\rho^E\frac{1+v^2}{1-v^2}-(e,J^H)\frac{2\varepsilon v}{1-v^2},$$

$$J'^E=J^E+e(e,J^E)\frac{2v^2}{1+v^2}-\quad e\frac{v\rho^H}{\mu\left(1+v^2\right)}. \qquad (5.11)$$

А из мнимой части – для плотностей массы и гравимагнитного тока:

$$\rho'^H=\rho^H\frac{1+v^2}{1-v^2}+(e,J^E)\frac{2\mu\quad v}{1-v^2},$$

$$J'^H=J^H+e(e,J^H)\frac{2v^2}{1+v^2}+\quad e\frac{v\rho^E}{\varepsilon\left(1+v^2\right)}. \qquad (5.12)$$

Аналогично легко получить соотношения для действительной и мнимой частей плотностей мощности и объемной силы.

8. Заключение. Заметим, что в формуле преобразования плотности массы (5.12) первое слагаемое дает эйнштейновское увеличение массы в подвижной системе координат. Однако второе слагаемое может ее как увеличить, так и уменьшить, в зависимости от направления электрического тока. Его вклад определяется не только скоростью движения системы координат v, но и магнитной проницаемостью среды μ. Причем на изменение массы влияет электрический ток, а на изменение плотности электрического заряда – гравимагнитный ток.

Формула преобразования (5.10) для мощности M содержит силу F. Поэтому здесь изменен знак комплексного градиента в формулах (4.2), в отличие от аналогичных в [1, 2], где для закона сохранения заряда-тока (3.10) требовалось, чтобы M=0. Как видим, во всех эквивалентных системах отсчета удовлетворить этому равенству, вообще говоря, невозможно.

Анализируя эти выражения, можно получить любопытные заключения, что мы предлагаем заинтересованному читателю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеева Л.А.* Об одной модели электро-гравимагнитного поля. Уравнения взаимодействия и законы сохранения // Математический журнал. Алма-Ата. 2004. Т. 4, № 2. С. 23-34.

2. *Алексеева Л.А.* Уравнения взаимодействия А-полей и законы Ньютона // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2004. №3. С. 45-53.

3. *Алексеева Л.А.* Гамильтонова форма уравнений Максвелла и ее обобщенные решения // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 6. С. 769-776.

4. *Алексеева Л.А.* Кватернионы гамильтоновой формы уравнений Максвелла // Математический журнал. 2003. Т. 3, №4. С. 20-24.

5. *Шнеерсон М.С.* О моногенных функциях Мойса // Математический сборник . Т. 44(86), №1. С. 113-122.

6. *Казанова Г.* Векторная алгебра. М.: Мир, 1979. 120 с.

7. *Kassandrov V.V.* Buquaternion electroynamics and Weyl-Cartan geometry of space-time // Gravitation and cosmology. 1995. V. 1, № 3. P. 216-222.

Резюме

Алдында автор ұсынған мақалалардағы [1, 2] электромагниттік өріс пен заряд-токтық өзара әсерінің өзгерістерді түсіндіретін бивкватерниондық моделі қарастырылған. Солардың теңдеулері Лоренц және ортогоналдық түрлендіру тобымен салыстырғанда инварианттығы дәлелденген масса тығыздығын және электрозарядпен электрогравимагниттік токтардың түрлендіру релятивистік формулалары болып шығарылған.

Summary

One biquaternion model (A-field) of electro-gravimagnetic field, describing change of these fields, charges and currents under their interaction is considered. Invariance of these equations for groups of Lorenc transformations are proved. The relativistic formulas of the transformation for the mass density, electric charges, electric and gravy magnetic currents are obtained. Formulas of transformation acting electric and gravy magnetic forces and their powers are constructed.

Институт математики МОН РК *Поступила 15.03.07г.*