УДК 517.5

Ш. А. БАЛГИМБАЕВА

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ИНФОРМАЦИИ О СПЕКТРЕ

Получены точные порядковые оценки для погрешности восстановления оператора дифференцирования в пространствах Никольского–Бесова по информации о спектре (преобразовании Фурье) функции.

Постановка задачи. Будем рассматривать задачу восстановления оператора дифференцирования ∂_x^α в пространстве Никольского–Бесова $B_{p,\theta}^s(R^n)$.

Задаче о приближении (вообще говоря неограниченного) оператора ограниченными линейными операторами на классах функций (задаче С. Б. Стечкина) и родственным экстремальным задачам посвящено много работ. Весьма полный обзор и детальный анализ этой проблематики можно найти в работе [1]. Отметим лишь, что ранее подробно исследовано наилучшее приближение операторов, инвариантных относительно сдвига в пространствах $L_p(R^n), 1 \le p \le \infty$. Оператор дифференцирования также является инвариантным относительно сдвига.

Напомним общую постановку задачи восстановления. Пусть C – некоторое множество в векторном пространстве X. Про каждый элемент $x \in C$ мы располагаем информацией $I(x)$, где I – (однозначное)отображение (называемое информационным) из C в другое векторное пространство Y. Информация об элементах из C может быть задана неточно, и потому I, вообще говоря, – многозначное отображение. Пусть, далее Z – нормированное пространство и $\Lambda : X \to Z$ – линейный оператор.

Задача заключается в том, чтобы восстановить по возможности наилучшим образом оператор Λ на классе C в метрике пространства Z по имеющейся информации I. Любое отображение $\varphi : Y \to Z$ будем называть методом восстановления. Погрешностью этого метода называется величина

$$e(\Lambda, C, I, \varphi) = \sup_{x\in C}\left\|\Lambda x - \varphi(I(x))\right\|_Z .$$

Введем некоторые обозначения. Пусть N, Z, R – множества натуральных, целых, вещественных чисел соответственно; $N_0 = N \cup \{0\}$ – множество всех неотрицательных целых, $n \in N, R^n$ – n-мерное евклидово пространство. Для $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in R^n$, как обычно, $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ – скалярное произведение. Для мультииндекса α через $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ обозначим его длину. Обозначим $\partial_x^\alpha := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}x_1\dots\partial^{\alpha_n}x_n}$.

Запись $A \cong B$ означает, что существуют константы $C_1, C_2 > 0$: $A \le C_1 B \le C_2 A$.

Пусть $S(R^n), S'(R^n)$ - пространства Шварца всех бесконечно дифференцируемых быстроубывающих комплекснозначных функций и медленно растущих распределений (обобщенных функций) на R^n соответственно, $D(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω.

Преобразование Фурье обобщенной функции $f \in S'(R^n)$ обозначим через $F(f)$. В частности, если $f \in L_1(R^n)$, то

$$F(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} f(x)e^{-i(x,\xi)}dx .$$

Известно, что $F(f)$ представляет собой изоморфизм $S(R^n)$ и $S'(R^n)$ на себя.

Обратное преобразование Фурье обозначим через $F^{-1}(f)$.

Для $f \in S'(R^n)$ рассмотрим сужение $F(f)$ на $[-\sigma,\sigma]^n$ как сужение обобщенной функции, т.е. как линейный непрерывный функционал над пространством $D((-\sigma,\sigma)^n)$. Обозначим данное сужение через $F(f)\big|_{[-\sigma,\sigma]^n}$.

Определение 1. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда как обычно имеем

$$L_p = L_p(R^n) = \left\{ f : \|f\|_p = \left(\int_{R^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Определим пространства Никольского–Бесова $B^s_{p,\theta}(R^n)$ (см., например, [2, 3]).

Определение 2. Функция f принадлежит пространству $B^s_{p,\theta}(R^n)$, $1 \le \theta < \infty$, $s > 0$, если $f \in L_p(R^n)$ и для нее конечна полунорма ($\bar{s} = [s]$)

$$\|f\|_{b^s_{p,\theta}(R^n)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^\infty t^{-1-s\theta}\left\|\Delta_j^{\bar{s}+1}(t)f\right\|_p^\theta dt\right)^{\frac{1}{\theta}} .$$

При этом полагаем

$$\left\|f\middle|B^s_{p,\theta}(R^n)\right\| = \|f\|_p + \|f\|_{b^s_{p,\theta}(R^n)} .$$

Здесь Δ_j^m – оператор m-й разности по j-й переменной.

Нами рассматривается задача восстановления оператора дифференцирования ∂_x^α в пространстве $B^s_{p,\theta}(R^n)$.

В качестве информации о функциях $f \in B^s_{p,\theta}(R^n)$ используется сужение преобразования Фурье $F(f)\big|_{[-\sigma,\sigma]^n}$. Таким образом, предполагаются известными значения функционала $F(f)\big|_{[-\sigma,\sigma]^n}$ на любых функциях из $D((-\sigma,\sigma)^n)$.

Отметим, что задача оптимального восстановления операторов на функциональных классах на основе информации о спектре рассматривалась в [4]. А именно, рассматривается задача оптимального восстановления функций и их производных по информации о спектре

В [4] получены точные решения задачи оптимального восстановления: при $p = 2, p = \infty$ найдены точные значения для погрешности оптимального восстановления и указаны явные оптимальные методы восстановления. При $2 < p < \infty$ получена оценка снизу погрешности оптимального восстановления.

Известно, что для любой обобщенной функции $f \in S'(R^n)$ ее разложение в ряд Фурье по всплескам Мейера сходится к f в топологии $S'(R^n)$.

В качестве (линейного) метода приближенного восстановления оператора ∂_x^α, использующего информацию $F(f)\big|_{[-\sigma,\sigma]^n}$ о функции $f \in B^s_{p,\theta}(R^n)$, будем рассматривать специальную «частную» сумму ее разложения в ряд по всплескам Мейера.

Предварительные сведения. Сформулируем некоторые известные факты, которые использованы в работе.

1. Как известно ([2], стр. 295), функция

$$D_N(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin Nt_j}{t_j}$$

называется ядром Дирихле порядка N в n-мерном непериодическом случае.

Ее преобразование Фурье имеет вид

$$F(D_N(t)) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^n (\kappa)_{\Delta_N}, \Delta_N = \left\{ x_j \,|< N, j = \overline{1,n} \right\}.$$

Отметим, что $D_N(z)$ обладает следующими свойствами, которые будут использованы ниже.

1) $D_N(z)$ – целая функция экспоненциального типа N по каждой переменной $z_j, (j = \overline{1,n})$, принадлежит $L_p, 1 < p \le \infty$.

2) Свертка

$$S_N(f,x) = D_N * f = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} D_N(x-t) f(t) dt$$

для $f \in L_p$ есть целая функция экспоненциального типа N по каждой переменной и принадлежит L_p.

При этом

$$\left\| D_N * f \right\|_p \le k \left\| f \right\|_p,$$

где k зависит только от n и от $p, 1 < p < \infty$.

3) $S_N(f) \to f$ слабо при $N \to \infty$.

Тогда регулярную в смысле L_p функцию f можно разложить в (слабо сходящийся) ряд

$$f = S_{2^0}(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[S_{2^k}(f) - S_{2^{k-1}}(f) \right].$$

Верна теорема (см. [2])

Теорема А. Пусть $1 < p < \infty,\ 1 \le \theta \le \infty,\ s$ – произвольное действительное число.

$f \in B^s_{p,\theta}(R^n)$ тогда и только тогда, когда f регулярна в смысле L_p и ее (сходящийся к ней слабо) ряд

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j,$$

где $\beta_0 = S_{2^0}(f),\ \beta_j = \left[S_{2^j}(f) - S_{2^{j-1}}(f) \right]$, $j = 1,2,\dots$, таков, что

$$\left\| f \middle| B^s_{p,\theta}(R^n) \right\| = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js\theta} \left\| \beta_j \right\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty.$$

(с естественной метрикой при $\theta = \infty$.)

2. Определим кратную систему одномерных всплесков Мейера (см., например, [5] или [6]).

Пусть $\theta(\xi)$ – нечетная бесконечно дифференцируемая функция

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & \xi > \dfrac{\pi}{3} \\ -\dfrac{\pi}{4} & \xi < -\dfrac{\pi}{3} \end{cases},$$

$\lambda(\xi)$ – четная функция, такая что

$$\lambda(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + \theta(\xi - \pi), & \xi \in \left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right] \\ \dfrac{\pi}{4} - \theta(\dfrac{\xi}{2} - \pi), & \xi \in \left[\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{8\pi}{3}\right] \\ 0, & \xi \in \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{8\pi}{3}, \infty\right] \end{cases}.$$

Преобразование Фурье масштабной функции Мейера φ определяется как

$$F(\varphi)(\xi)=\begin{cases}\cos(\lambda(\xi)), & |\xi|\le\frac{4\pi}{3}\\ 0, & |\xi|>\frac{4\pi}{3}\end{cases},$$

откуда

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_R \cos(t\xi)\cos(\lambda(\xi))d\xi .$$

Тогда

$$F(\psi)(\xi)=e^{-i\xi/2}\sin(\lambda(\xi))$$

или

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_R \cos((t-\frac{1}{2})\xi)\sin(\lambda(\xi))d\xi .$$

С помощью операций сдвига и растяжения определяем функции

$$\psi_{jk}=2^{j/2}\psi(2^j t-k),\quad j,k\in Z .$$

Из определения видно, что

$$\operatorname{supp} F(\psi)(\xi)\subset\left[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right],$$

поэтому

$$\operatorname{supp} F(\psi_{jk})(\xi)\subset\left[-2^j\frac{4\pi}{3},2^j\frac{4\pi}{3}\right].$$

Ясно также, что всплески Мейера – это целые функции экспоненциального типа, принадлежащие $S(R)$.

Теперь введем n-мерную систему всплесков Мейера $\Psi:=\left\{\varphi_{0k},\psi^e_{jk}\right\}_{e\ne\varnothing,j\in N_0,k\in Z^n}$ следующим образом:

$$\left\{\varphi_{0k}(x):=\prod_{\nu=1}^{n}\varphi_{0k_\nu}(x_\nu),\ \psi^e_{jk}(x):=\right.$$

$$\left.=\prod_{\nu\in e}\varphi_{jk_\nu}(x_\nu)\prod_{\nu\in e}\psi_{jk_\nu}(x_\nu)\right\}_{e\ne\varnothing,j\in N_0,k\in Z^n};$$

здесь e пробегает все непустые подмножества множества $\{1,2,...,n\}$, $e'=\{1,2,...,n\}\setminus e$. Известно, что система всплесков Ψ образует безусловный базис в пространстве $B^s_{p,\theta}(R^n)$, $s\in R$, $1<p<\infty$, $1\le\theta\le\infty$ (см., например, [5]).

Верна теорема (см. [7]).

Теорема В. Для любой $\overline{h}$ ограниченной целой функции экспоненциального типа 2^{j+1} справедливо соотношение $P_j(\overline{h})=\overline{h}$.

Здесь P_j – проекционный оператор на подпространство $span\left\{\varphi_{0k}(x),\psi^e_{jk}(x)\right\}_{e\ne\varnothing,i=\overline{1,j},k\in Z^n}$.

Основной результат. В качестве метода приближенного восстановления оператора ∂^α_x рассмотрим следующий оператор $\partial^\alpha_x S_\sigma$:

$$\partial^\alpha_x S_\sigma[F(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]=$$

$$=\partial^\alpha_x\left(\sum_{k\in Z^n}c_k(f)\varphi_{0k}+\sum_{e\ne\varnothing}\sum_{j\le j_\sigma}\sum_{k\in Z^n}c^e_{jk}(f)\psi^e_{jk}\right),$$

где

$$c_k(f)=(f,\varphi_{0k}),\quad c^e_{j_k}(f)=(f,\psi^e_{jk})$$

– коэффициенты Фурье f по системе Ψ, а $j_\sigma=\left[\log_2\frac{3\sigma}{4\pi}\right]$.

По формуле Планшереля для любых $h\in S'$, $\varphi\in S$:

$$(h,\varphi)=\frac{1}{2\pi}(F(h),F(\varphi)).$$

Из определения следует, что $\Psi\subset S(R^n)$; ясно также, что

$$\operatorname{supp}\ F(\psi^e_{jk})(\xi)\subset\left[-2^j\frac{4\pi}{3},2^j\frac{4\pi}{3}\right]^n,$$

$$\operatorname{supp}\ F(\varphi_{0k})(\xi)\subset\left[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]^n.$$

Таким образом, метод $\partial^\alpha_x S_\sigma$ использует информацию только о $F(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}$.

Основной результат настоящей статьи содержится в следующей теореме.

Теорема. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $s > 0,\ r \ge p$, причем $0 < \frac{n}{p} - \frac{n}{r} < s - m$, $0 < t < s - m$, где $m = |\alpha|$, α – мультииндекс. Тогда для метода восстановления $\partial_x^\alpha S_\sigma$ справедливы оценки:

$$\sup_{\left\|f\left|B_{p,\theta}^s\right.\right\|\le 1} \left\| \partial_x^\alpha f - \partial_x^\alpha S_\sigma \left[F(f)\Big|_{[-\sigma,\sigma]^n} \right] \Big| B_{p,\theta}^t \right\| \cong$$

$$\cong 2^{-j_\sigma(s-m-t)},$$

$$\sup_{\left\|f\left|B_{p,\theta}^s\right.\right\|\le 1} \left\| \partial_x^\alpha f - \partial_x^\alpha S_\sigma [F(f)\Big|_{[-\sigma,\sigma]^n}] \right\|_r \cong$$

$$\cong 2^{-j_\sigma(s-m-\frac{n}{p}+\frac{n}{r})}.$$

Доказательство. Приведем схему получения оценки сверху. Выше через $\partial_x^\alpha S_\sigma [F(f)\Big|_{[-\sigma,\sigma]^n}]$ мы обозначили действие оператора дифференцирования на специальную «частную» сумму разложения в ряд по всплескам Мейера. Далее, для краткости будем обозначать $\partial_x^\alpha S_\sigma(f) := \partial_x^\alpha S_\sigma [F(f)\Big|_{[-\sigma,\sigma]^n}]$. Тогда имеем

$$\partial_x^\alpha S_\sigma(f) =$$

$$= \partial_x^\alpha \left(\sum_{k\in Z^n} c_k(f)\varphi_{0k} + \sum_{e\ne\varnothing} \sum_{j\le j_\sigma} \sum_{k\in Z^n} c_{jk}^e(f)\psi_{jk}^e \right) =$$

$$= \left(\sum_{k\in Z^n} c_k(f)\partial_x^\alpha\varphi_{0k} + \sum_{e\ne\varnothing} \sum_{j\le j_\sigma} \sum_{k\in Z^n} c_{jk}^e(f)\partial_x^\alpha\psi_{jk}^e \right) =$$

$$= S_\sigma(\partial_x^\alpha f).$$

Рассмотрим норму разности $\left\| \partial_x^\alpha f - \partial_x^\alpha S_\sigma \left[F(f)\Big|_{[-\sigma,\sigma]^n} \right] \right\|_X$, где X – банахово пространство. Используя линейность операторов ∂_x^α, $S_\sigma[F(f)\Big|_{[-\sigma,\sigma]^n}]$ и применяя теорему В для g_f – целой функции экспоненциального типа $2^{j_\sigma+1}$, на которой реализуется наилучшее приближение функции $f \in B_{p,\theta}^s(R^n)$, получим:

$$\left\|\partial_x^\alpha f - \partial_x^\alpha S_\sigma(f)\right\|_X \le \left\|\partial_x^\alpha f - \partial_x^\alpha g_f\right\|_X +$$

$$+\left\|\partial_x^\alpha g_f - \partial_x^\alpha S_\sigma(g_f)\right\|_X + \left\|\partial_x^\alpha S_\sigma(g_f) - \partial_x^\alpha S_\sigma(f)\right\|_X \le$$

$$\le \left\|\partial_x^\alpha (f - g_f)\right\|_X \left(1 + \left\|S_\sigma\right\|_X\right).$$

Пусть $X = B_{p,\theta}^s(R^n)$. Функция $f - g_f \in B_{p,\theta}^s(R^n)$, следовательно по теореме А справедливо представление

$$f - g_f = \sum_{j\ge j_\sigma+1} \beta_j .$$

Очевидно, что $\partial_x^\alpha(f - g_f) \in B_{p,\theta}^{s-m}(R^n) \subset \subset B_{p,\theta}^t(R^n)$, где $0 < t < s - m$. Теперь, используя эквивалентную нормировку, приведенную в теореме А и неравенство Бернштейна, получим оценку

$$\sup_{\left\|f\left|B_{p,\theta}^s\right.\right\|\le 1} \left\| \partial_x^\alpha f - \partial_x^\alpha S_\sigma \left[F(f)\Big|_{[-\sigma,\sigma]^n} \right] \Big| B_{p,\theta}^t \right\| \le$$

$$\le 2^{-j_\sigma(s-m-t)}.$$

Пусть $X = L_r(R^n)$. Очевидно имеем, что $\partial_x^\alpha(f - g_f) \in B_{p,\theta}^{s-m}(R^n) \subset L_r(R^n)$, где $p<r$.

Используя неравенство Минковского, неравенство Гельдера, неравенство Бернштейна, неравенство разных метрик С. М. Никольского (см., например [2, гл. 3]), а так же теорему А, получим оценку

$$\sup_{\left\|f\left|B_{p,\theta}^s\right.\right\|\le 1} \left\| \partial_x^\alpha f - \partial_x^\alpha S_\sigma [F(f)\Big|_{[-\sigma,\sigma]^n}] \right\|_r \le$$

$$\le 2^{-j_\sigma(s-m-\frac{n}{p}+\frac{n}{r})}.$$

Таким образом, оценки сверху получены.

При получении оценок снизу строятся “плохие” функции из единичного шара пространства $B_{p,\theta}^s(R^n)$, на которых реализуется порядок, комбинированием теоремы представления А и теоремы В.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арестов В.В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89-124.

2. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1997. 456 с.

3. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986. 448 с.

4. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функциональный анализ и его приложения. 2003. Т. 37, вып. 3. С. 51-64.

5. *Meyer Y.* Wavelets and operators. Cambridge Univ. Press, 1992.

6. *Стечкин С.Б., Новиков И.Я.* Основы теории всплесков // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53, вып. 6. С. 54-128.

7. *Новиков И.Я.* Онделетты И. Мейера – оптимальный базис в $C(0,1)$ // Мат. заметки. 1992. Т. 52, вып. 5. С. 88-92.

Резюме

Никольский–Бесов кеңістіктерінде дифференциалдық операторын спектр туралы ақпар бойынша қалпына келтіру бір әдісінің нақты реттік бағалаулары алынды.

Summary

In this paper exact (in order sense) estimates for error bounds of a recovery method using spectral information for differential operator on the Nikol'skii–Besov spaces.

Институт Математики
ЦФМИ МОН РК

Поступила 15.03.07г.