УДК 517.968.72

Д. С. ДЖУМАБАЕВ, Э. А. БАКИРОВА

КРИТЕРИЙ КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

На основе метода параметризации и аппроксимации интегро-дифференциального уравнения нагруженным дифференциальным уравнением получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений.

На отрезке $[0,T]$ рассматривается двухточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad x \in R^n, \quad \|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|, \tag{1}$$

$$B\,x(0) + C\,x(T) = d, \;\; d \in R^n, \tag{2}$$

где $A(t)$, $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $K(t,s)$ непрерывна на $[0,T]\times[0,T]$.

Известные методы исследования краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений [1, 2] позволяют получить лишь достаточные условия корректной разрешимости задачи (1), (2). В связи с этим, целью настоящей работы является нахождение необходимых и достаточных условий корректной разрешимости двухточечной краевой задачи для систем интегро-диф-ференциальных уравнений.

Разбивая интервал $[0,T]$ на части с шагом $h>0$: $mh = T$ задачу (1),(2) аппроксимируем двухточечной краевой задачей для систем нагруженных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \sum_{i=1}^{m} \int_{(i-1)h}^{ih} K(t,s)ds\,y[(i-1)h] + f(t), \;\; y \in R^n, \tag{3}$$

$$By(0) + Cy(T) = d, \;\; d \in R^n. \tag{4}$$

Определение. Краевая задача (1), (2) ((3),(4)) называется корректно разрешимой, если для любых $f(t)$, d существует единственное решение $x(t)$, ($y(t)$) и для него справедлива оценка

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\| \le \gamma \max(\|f\|_1, \|d\|), \;\; \left(\|y\|_1 \le K \max(\|f\|_1, \|d\|)\right),$$

где $\gamma\,(K)$ – константа, не зависящая от $f(t)$, d.

Число $\gamma\,(K)$ называется константой корректной разрешимости задачи (1), (2), ((3),(4)).

В следующих утверждениях устанавливается взаимосвязь между корректными разрешимостями задач (1), (2) и (3), (4).

Теорема 1. *Если краевая задача (1),(2) корректно разрешима с константой γ и выполняется неравенство*

$$q_1(h) = \frac{1}{2}\left[(\alpha + \beta T)\gamma + 1\right]\beta T h < 1,$$

то краевая задача (3), (4) корректно разрешима с константой

$$K = \frac{2\gamma}{2 - [(\alpha + \beta T)\gamma + 1]\beta T h}$$

и справедлива оценка

$$\|y-x\|_1 \le \gamma \frac{[(\alpha+\beta T)\gamma+1]\beta Th}{2-[(\alpha+\beta T)\gamma+1]\beta Th}\max(\|f\|_1,\|d\|),$$

где $\max\limits_{t\in[0,T]}\|A(t)\|=\alpha$, $\max\limits_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]}\|K(t,s)\|=\beta$, $\alpha,\beta - const$, $x(t)$ *– решение задачи (1),(2),* $y(t)$ *– решение задачи (3),(4).*

Теорема 2. *Если краевая задача (3),(4) корректно разрешима с константой K и выполняется неравенство*

$$q_2(h)=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta T)K+1]\beta Th<1,$$

то краевая задача (1),(2) корректно разрешима с константой

$$\gamma=\frac{2K}{2-[(\alpha+\beta T)K+1]\beta Th}$$

и справедлива оценка

$$\|x-y\|_1 \le K\frac{[(\alpha+\beta T)K+1]\beta Th}{2-[(\alpha+\beta T)K+1]\beta Th}\max(\|f\|_1,\|d\|).$$

Доказательство этих утверждений проводится с использованием схем доказательств теорем 1, 2 из [3].

К задаче (3),(4) применяем метод параметризации [4]. Возьмем число $l\in N$ и по нему произведем разбиение $[0,T)=\bigcup\limits_{r=1}^{ml}\left[\frac{(r-1)h}{l},\frac{rh}{l}\right)$. Обозначив через $x_r(t)$, $r=\overline{1,ml}$ сужение функций $x(t)$ на r-ый интервал $[(r-1)h/l,rh/l)$, введя дополнительные параметры $\lambda_r=x_r[(r-1)h/l]$, $r=\overline{1,ml}$ и на каждом интервале $[(r-1)h/l,rh/l)$ произведя замену $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$, перейдем к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt}=A(t)[u_r+\lambda_r]+\sum_{i=0}^{m-1}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}K(t,s)ds\lambda_{il+1}+f(t),\quad t\in[(r-1)h/l,rh/l),\tag{5}$$

$$u_r[(r-1)h/l]=0,\quad r=\overline{1,ml},\tag{6}$$

$$B\lambda_1+C\lambda_{ml}+C\lim_{t\to T-0}u_{ml}(t)=d,\tag{7}$$

$$\lambda_s+\lim_{t\to sh-0}u_s(t)=\lambda_{s+1},\quad s=\overline{1,ml-1}.\tag{8}$$

Здесь (8) условия склеивания решения во внутренних точках разбиения.

Если $x(t)$ является решением задачи (1), (2), то пара $(\lambda,u[t])$, где

$$\lambda=(x(0),x(h/l),x(2h/l),\dots,x(T-h/l))'\in R^{nml},$$

$$u[t]=(x(t)-x(0),x(t)-x(h/l),x(t)-x(2h/l),\dots,x(t)-x(T-h/l)),$$

будет решением задачи (5)–(8). И, наоборот, если пара $(\tilde{\lambda},\tilde{u}[t])$ – решение задачи (5)–(8), то функция $\tilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\tilde{x}(t)=\tilde{\lambda}_r+\tilde{u}_r(t)$, $t\in[(r-1)h/l,rh/l)$, $r=\overline{1,ml}$, $\tilde{x}(T)=\tilde{\lambda}_{ml}+\lim\limits_{t\to T-0}\tilde{u}_{ml}(t)$ будет решением задачи (3), (4). Появление начальных условий (6), позволяет при фиксированных $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{ml})'\in R^{nml}$ определить функции $u_r(t)$, $r=\overline{1,ml}$ из интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$u_r(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau)[u_r(\tau)+\lambda_r]d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\sum_{i=0}^{m-1}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}K(t,s)\lambda_{il+1}dsd\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}f(\tau)d\tau,$$

$$t\in[(r-1)h/l,rh/l),\quad r=\overline{1,ml}. \tag{9}$$

В уравнении (9) вместо $u_r(\tau)$ подставляя соответствующую правую часть и повторив этот процесс ν раз, получим представление функций $u_r(t)$ вида

$$u_r(t)=D_{\nu r}(t)\lambda_r+\sum_{i=0}^{m-1}H^i_{\nu r}(t)\lambda_{il+1}+F_{\nu r}(t)+G_{\nu r}(u,t),\ t\in[(r-1)h/l,rh/l), \tag{10}$$

где

$$D_{\nu r}(t)=\int\limits_{(r-1)h/l}^{t}A(\tau_1)d\tau_1+\ldots+\int\limits_{(r-1)h/l}^{t}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h/l}^{\tau_{\nu-1}}A(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$H^i_{\nu r}(t)=\int\limits_{(r-1)h/l}^{t}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}K(\tau_1,s)dsd\tau_1+\int\limits_{(r-1)h/l}^{t}A(\tau_1)\int\limits_{(i-1)h}^{\tau_1}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}K(\tau_2,s)dsd\tau_2d\tau_1+\ldots+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h/l}^{t}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h/l}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h/l}^{\tau_{\nu-1}}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}K(\tau_\nu,s)dsd\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1,$$

$$F_{\nu r}(t)=\int\limits_{(r-1)h/l}^{t}f(\tau_1)d\tau_1+\ldots+\int\limits_{(r-1)h/l}^{t}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h/l}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h/l}^{\tau_{\nu-1}}f(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$G_{\nu r}(u,t)=\int\limits_{(r-1)h/l}^{t}A(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h/l}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h/l}^{\tau_{\nu-1}}A(\tau_\nu)u_r(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1.$$

Переходя в правой части (10) к пределу при $t\to(rh/l)-0$, подставив соответствующие им выражения в условия (7), (8) и умножив (7) на h/l, получим линейную систему уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{ml})'$

$$\frac{h}{l}B\lambda_1+\frac{h}{l}C[I+D_{\nu,ml}(mh)]\lambda_{ml}+\frac{h}{l}C\sum_{i=0}^{m-1}H^i_{\nu,ml}(mh)\lambda_{il+1}=\frac{h}{l}d-\frac{h}{l}CF_{\nu,ml}(mh)-\frac{h}{l}CG_{\nu,ml}(u,mh), \tag{11}$$

$$[I+D_{\nu,s}(sh/l)]\lambda_s+\sum_{i=0}^{m-1}H^i_{\nu,s}(sh/l)\lambda_{il+1}-\lambda_{s+1}=F_{\nu,s}(sh/l)+G_{\nu,s}(u,sh/l),\ s=\overline{1,ml-1}, \tag{12}$$

где I – единичная матрица размерности $(n\times n)$.

Обозначив через $Q_\nu(l,h)$ матрицу, состоящую из коэффициентов при неизвестных параметрах в левых частях уравнений (11), (12) и введя векторы

$$F_\nu(l,h)=\left(-\frac{h}{l}d+\frac{h}{l}CF_{\nu,ml}(mh),F_{\nu,1}(h/l),F_{\nu,2}(2h/l),\ldots,F_{\nu ml-1}(T-h/l)\right)',$$

$$G_\nu(u,l,h)=\left(\frac{h}{l}CG_{\nu,ml}(u_{ml},mh),G_{\nu,1}(u_1,h/l),G_{\nu,2}(u_2,2h/l),\ldots,G_{\nu,ml-1}(u_{ml-1},T-h/l)\right)',$$

запишем ее в виде

$$Q_\nu(l,h)\lambda=-F_\nu(l,h)-G_\nu(u,l,h),\ \lambda\in R^{nml}. \tag{13}$$

Таким образом, для нахождения неизвестных пар $(\lambda, u[t])$ – решения задачи (5)–(8) имеем замкнутую систему уравнений (9), (13). Пара $(\lambda, u[t])$ решение задачи (5)–(8) находится как предел последовательности пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 0,1,2,...$, определяемой по следующему алгоритму:

0-шаг. а) Предполагая, что при выбранных $l \in N$, $\nu \in N$ матрица $Q_\nu(l,h)$ обратима, начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} \in R^{nml}$ определим из систем уравнений $Q_\nu(l,h)\lambda = -F_\nu(l,h)$, т.е. $\lambda^{(0)} = -[Q_\nu(l,h)]^{-1} F_\nu(l,h)$.

б) Используя компоненты вектора $\lambda^{(0)} \in R^{nml}$ и решая задачи Коши (5), (6) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ на интервалах $[(r-1)h/l, rh/l)$, , находим функции $u_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1,ml}$.

1-шаг. а) Подставляя найденные $u_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1,ml}$ в правую часть (13), из $Q_\nu(l,h)\lambda = -F_\nu(l,h) - G_\nu(u^{(0)}, l, h)$ определим $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, ..., \lambda_{ml}^{(1)})' \in R^{nml}$.

б) На отрезках $[(r-1)h/l, rh/l)$, решая задачи Коши (3),(4) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$ находим функции $u_r^{(1)}(t)$, $r = \overline{1,ml}$. И т. д.

Продолжая процесс, на ***k*-ом шаге** получаем систему пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 0,1,2,...$

Достаточные условия существования и единственности, а также оценку решения задачи (3), (4) устанавливает

Теорема 3. Пусть существуют числа $h > 0 : mh = T$, $l \in N$, $\nu \in N$, при которых матрица $Q_\nu(l,h)$ обратима и выполняются неравенства

а) $\left\| [Q_\nu(l,h)]^{-1} \right\| \le \gamma_\nu(l,h)$,

б) $q_\nu(l,h) = \gamma_\nu(l,h) \max\left(1, \frac{h}{l}\|C\|\right)\left[e^{\frac{\alpha h}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu}\left(\frac{\alpha h}{l}\right)^j \frac{1}{j!} + m\beta\frac{h}{l}\left(e^{\frac{\alpha h}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h}{l}\right)^j \frac{1}{j!}\right)\right] < 1.$

Тогда краевая задача (3), (4) имеет единственное решение $y(t)$ и справедлива оценка

$$\|y\|_1 \le M_\nu(l,h) \max(\|f\|_1, \|d\|),$$

где

$$M_\nu(l,h) = \left\{ \gamma_\nu(l,h)\left[e^{\frac{\alpha h}{l}} - 1 + e^{\frac{\alpha h}{l}} m\beta\frac{h}{l}\right] \max\left[1 + \frac{h}{l}\|C\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h}{l}\right)^j \frac{1}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h}{l}\right)^j \frac{1}{j!}\right] + \right.$$

$$\left. + e^{\frac{\alpha h}{l}} \right\} \frac{h}{l}\left\{ \gamma_\nu(l,h)\left[e^{\frac{\alpha h}{l}} + e^{\frac{\alpha h}{l}} m\beta\frac{h}{l}\right] \max\left(1, \frac{h}{l}\|C\|\right)\frac{1}{1 - q_\nu(l)}\left(\frac{\alpha h}{l}\right)^\nu \frac{1}{\nu!} + 1 \right\} +$$

$$+ \gamma_\nu(l,h)\max\left[1 + \frac{h}{l}\|C\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h}{l}\right)^j \frac{1}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h}{l}\right)^j \frac{1}{j!}\right]\frac{h}{l}.$$

Отметим, что условия теоремы обеспечивают также сходимость предложенного алгоритма нахождения решения эквивалентной задачи с параметрами (5)–(8).

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1 из [4].

Теорема 4. Пусть существуют числа $h > 0 : mh = T$, $l \in N$, $\nu \in N$, при которых матрица $Q_\nu(l,h)$ обратима и наряду с неравенствами а), б) теоремы 3 имеет место неравенство

в) $\delta_\nu(l,h) = \dfrac{1}{2}\big[(\alpha + \beta T)M_\nu(l,h) + 1\big]\beta Th < 1$.

Тогда краевая задача (1),(2) корректно разрешима с константой

$$\gamma = \frac{2M_\nu(l,h)}{2 - [(\alpha + \beta T)M_\nu(l,h) + 1]\beta Th}$$

и справедлива оценка

$$\|x - y\|_1 \le M_\nu(l,h)\frac{[(\alpha + \beta T)M_\nu(l,h) + 1]\beta Th}{2 - [(\alpha + \beta T)M_\nu(l,h) + 1]\beta Th}\max(\|f\|_1, \|d\|).$$

Следующие утверждения показывают, что условия теоремы 4 не только достаточны, но и необходимы для корректной разрешимости задачи (1), (2).

Теорема 5. Краевая задача (1), (2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $l \in N$, существуют $h = h(l)$, $\nu = \nu(l) \in N$, при которых матрица $Q_\nu(l,h)$ обратима и выполняются неравенства а), б), в).

Теорема 6. Краевая задача (1), (2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $\nu \in N$, существуют $l = l(\nu) \in N$, $h = h(l)$, при которых матрица $Q_\nu(l,h)$ обратима и выполняются неравенства а), б), в).

Доказательство теорем 4, 5, 6 проводится по схеме доказательств утверждений [3, 4] с использованием теорем 1, 2, 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Некрасов А.И.* Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // Труды ЦАГИ. 1934. Вып. 190. С. 1-25.

2. *Виграненко Т.И.* Об одной граничной задаче для линейных интегро-дифференциальных уравнений // Зап. Ленинградского горн. ин-та. 1956. Т. 33. С. 177-187.

3. *Бакирова Э.А., Джумабаев Д.С.* Об одной аппроксимации линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Математический журн. 2005. Т. 5, № 4. С. 34-44.

4. *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50-66.

Резюме

Параметрлеу әдісі және интегралдық-дифференциалдық теңдеуді жүктелген дифференциалдық теңдеумен аппроксимациялау негізінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін екі нүктелі шеттік есептің қисынды шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды.

Summary

The necessary and sufficient conditions of correct solvability of two points boundary value problem for systems of integral-differential equations are obtained on the basis of parameterization method and of approximation integral-differential equations by loaded differential equations.

Поступила 15.05.07г.