УДК 530.145.6

С. А. ЖАУГАШЕВА, К. КАРИМЖАН, К. С. ДЮСЕБАЕВА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПЕРТУРБАТИВНОЙ И СТРУННОЙ ПОПРАВКИ К МАССОВОМУ СПЕКТРУ МЕЗОНОВ

Предложен один из альтернативных вариантов вычисления непертурбативной и струнной поправки к массовому спектру мезонов в рамках метода полевых корреляторов. Определена зависимость струнной поправки от орбитального квантового числа и непертурбативной добавки. Показано, что эти добавки дают существенный вклад в спектр мезонов состоящих из только легких кварков.

1. Введение. Описание массового спектра адронов с орбитальными и радиальными возбуждениями с учетом релятивистского и непертурбативного характера взаимодействия является одной из фундаментальных проблем сильных взаимодействий. К настоящему времени отсутствует общепринятый рецепт учета релятивистского и непертурбативного характера взаимодействия в феноменологических моделях кварков [1]. При определении непертурбативного характера взаимодействия в стандартной квантовой теории поля (КТП) обычно сталкиваются с решением интегрального уравнения, типа уравнения Бете-Солпитера с произвольным ядром. Однако, найти решение такого уравнения очень сложно. Поэтому описание свойств связанного состояния с учетом релятивистского и непертурбативного характера взаимодействия требует особого рассмотрения. Таким образом, описание массового спектра адронов с орбитальными и радиальными возбуждениями, содержащее минимальное число (физических) параметров, является одной из актуальных проблем физики элементарных частиц.

Квантовая хромодинамика (КХД) рассматривается как истинная непротиворечивая теория, которая полностью описывает поведение кварков и глюонов как кирпичиков адронной материи, и все основные явления в КХД имеют непертурбативный характер. В КХД до недавнего времени только в рамках метода правил сумм [2] использовали калибровочно-инвариантный язык конденсатов, чтобы описать вклад непертурбативного характера взаимодействия. Однако, для описания большинства явлений, возникающих на больших расстояниях, этот метод оказывается недостаточным. В работе [3], где используется представление Фока-Фейнмана-Швингера, предложен один из уникальных методов учета непертурбативного характера взаимодействия для описания свойств релятивистского связанного состояния (подробно см. обзор [4]). Основой метода является применение калибровочно-инвариантной функции Грина для белых объектов, которые могут быть записаны с помощью интегралов по путям [5]. Ключевым моментом данного подхода является вычисление функционального интеграла. Конечно, этот интеграл в общем виде не вычисляется, его вычисление возможно только при некоторых физических предположениях. В работе [6] предложен один из альтернативных вариантов вычисления функционального интеграла и определена масса глюбола. В данной работе в рамках метода полевых корреляторов вычисляется массовый спектр мезонов, состоящих из легко-легких и легко-тяжелых кварков, с учетом непертурбативного и релятивистского характера взаимодействия.

Рассмотрим взаимодействие двух заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле. Массу связанного состояния определим на основе исследования асимптотического поведения функции поляризационной петли для заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле. Тогда, масса связанного состояния определяется через функцию- петлю следующим образом:

$$M = -\lim_{x\to\infty}\frac{\ln \Pi(x)}{x}, \tag{1.1}$$

где $\Pi(x)$ – функция-петли и представляется она в следующем виде (детали подробно см. в [6]):

$$\Pi(x) = \iint\limits_0^\infty \frac{d\mu_1 d\mu_2}{\left(8\pi^2 x\right)^2}\exp\left\{-\frac{|x|}{2}\left(\frac{m_1^2}{\mu_1}+\mu_1\right)-\frac{|x|}{2}\left(\frac{m_2^2}{\mu_2}+\mu_2\right)\right\}J(\mu_1,\mu_2). \tag{1.2}$$

Здесь

$$J(\mu_1,\mu_2)=N_1N_2\iint \delta\vec{r}_1\delta\vec{r}_2\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x d\tau\left[\mu_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2}(\tau)+\mu_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}(\tau)\right]\right\}\exp\left\{-W_{1,1}+2W_{1,2}-W_{2,2}\right\}, \tag{1.3}$$

где

$$W_{i,j}=(-1)^{i+j}\frac{g^2}{2}\int\int_0^x d\tau_1 d\tau_2\dot{Z}_\alpha^{(i)}(\tau_1)\times D_{\alpha\beta}\left\{Z^{(i)}(\tau_1)-Z^{(j)}(\tau_2)\right\}\dot{Z}_\beta^{(j)}(\tau_2). \tag{1.4}$$

Определили функцию-петлю, состоящую из скалярных частиц с массами m_1 и m_2, которые взаимодействуют между собой обменным калибровочным полем. Существует два типа взаимодействия: первое – взаимодействие составляющих частиц посредством калибровочного поля, вклад которого определяется непосредственно $W_{1,2}$, второе – взаимодействие составляющих частиц самих с собой, т.е. диаграмма собственной энергии, вклад которой определяется $W_{1,1}$ и $W_{2,2}$. В нерелятивистском пределе величина $W_{1,2}$ соответствует потенциальным взаимодействиям, а $W_{1,1}$ и $W_{2,2}$ соответствуют непотенциальным взаимодействиям, которые определяют вклад в массу собственной энергии (детали см. в [7]). С другой стороны, функциональный интеграл (1.3) похож на Фейнмановский интеграл по траекториям для движения заряженных частиц с массами $м_1$ и $м_2$ в нерелятивистской квантовой механике [8]. Взаимодействие между этими частицами описывается выражением (1.4), которое содержит как потенциальные, так и непотенциальные взаимодействия. Гамильтониан взаимодействия в нерелятивистском пределе записывается в виде:

$$H=\frac{1}{2\mu_1}\vec{p}_1^{\,2}+\frac{1}{2\mu_2}\vec{p}_2^{\,2}+V(\vec{r}_1,\vec{r}_2), \tag{1.5}$$

где $V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ потенциал взаимодействия, который выражаются через $W_{i,j}$.

Согласно (1.1), нужно определить функцию-петлю в асимптотике. В пределе $|x|\to\infty$ функциональный интеграл (1.3) записывается в следующем виде:

$$\lim_{|x|\to\infty}J(\mu_1,\mu_2)=\exp\{-xE(\mu_1,\mu_2)\}, \tag{1.6}$$

где $E(\mu)$ – является собственным значением гамильтониана (1.5). В этом приближении интеграл, представленный в (1.3), в асимптотике $|x|\to\infty$ вычисляется методом перевала, тогда из (1.1) для массы связанного состояния получаем:

$$M=\sqrt{m_1^2-2\mu^2E'(\mu)}+\sqrt{m_2^2-2\mu^2E'(\mu)}+\mu E'(\mu)+E(\mu). \tag{1.7}$$

Параметр μ определятся из уравнения:

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}=\frac{1}{\sqrt{m_1^2-2\mu^2E'(\mu)}}+\frac{1}{\sqrt{m_2^2-2\mu^2E'(\mu)}}, \tag{1.8}$$

где использовано обозначение:

$$E'(\mu)=\frac{\partial E}{\partial\mu}.$$

Из (1.7) и (1.8) видно, что если мы определим E(м), то можно определить массу и конституэнтную массу связанного состояния.

Параметры μ_1 и μ_2 будем рассматривать как массы составляющих частиц в связанном состоянии. Эти массы отличаются от m_1 и m_2 – масс свободного состояния. При описании массового спектра релятивистского связанного состояния обычно вводится конституэнтная масса составляющих, которая отличается от массы исходной частицы. В частности, при описании массового спектра адронов, состоящих из кварков, обычно вводятся токовые и конституэнтные массы кварков, которые отличаются между собой. Мы установили аналитическое соотношение между конституэнтной массой и массой свободных состояний и определили массу релятивистских связанных состояний. Величина $E(\mu)$ является собственным значение гамильтониана (1.5) с потенциалом взаимодействия, который представлен в (1.4).

Работа построена следующим образом: во втором пункте, вычисляя энергетический спектр растущего потенциала, определен массовый спектр мезонов, состоящих из легко-легких и легко-тяжелых кварков с орбитальными и радиальными возбуждениями. В третьем пункте приведены детали вычисления массового спектра с учетом непертурбативного и непотенциального характера взаимодействия. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с существующими экспериментальными данными. В Приложении приведены некоторые детали вычисления энергетического спектра связанного состояния в рамках метода осцилляторного представления [9].

2. Определение массового спектра мезонов.

2.1. Определение энергетического спектра растущего потенциала. В рамках метода полевых корреляторов запирание цветных зарядов осуществляется с помощью линейно растущего потенциала. Определим $E(\mu)$ – энергетический спектр линейно растущего потенциала, с учетом орбитального и радиального возбуждения:

$$\left[\frac{1}{2\mu}\vec{P}^2 + \sigma\, r\right]\Psi = E(\mu)\Psi\,, \tag{2.1}$$

где σ – натяжение струны. Энергетический спектр и волновая функция определяются из уравнения Шредингера (УШ) в рамках метода осцилляторного представления (ОП) [6, 9]. Прежде всего, переходим к d-мерному вспомогательному пространству R^d, а гамильтониан взаимодействия представим в нормальной форме по операторам рождения a^+ и уничтожения a (детали см. в [9]):

$$H = H_0 + \varepsilon_0(E_r) + H_I\ , \tag{2.2}$$

где H_0 – гамильтониан свободного осциллятора

$$H_0 = \omega(a^+a)\,, \tag{2.3}$$

а энергия основного состояния ε_0 (E) в R^d имеет вид:

$$\varepsilon_0(\mathrm{E}) = \frac{d}{4}\omega + \frac{4\rho^2\mu E\Gamma\left(\frac{d}{2}+2\rho-1\right)}{\omega^{2\rho-1}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} - \frac{4\rho^2\mu\sigma\Gamma\left(\frac{d}{2}+3\rho-1\right)}{\omega^{3\rho-1}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \tag{2.4}$$

и H_I гамильтониан взаимодействия, представляется в нормальной форме:

$$H_I = \int\limits_0^\infty dx\int\left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d \cdot e^{-\tau^2(1+x)} : e^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)} : \left\{-\frac{4\rho^2\mu}{\omega^{2\rho-1}}\cdot\frac{Ex^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} + \frac{4\rho^2\mu\sigma x^{-3\rho}}{\omega^{3\rho-1}\Gamma(1-3\rho)}\right\}, \tag{2.5}$$

где введено обозначение $e_2^{-Z} = e^{-Z} - 1 + Z - \frac{1}{2}Z^2$. Здесь :*: является символом нормального упорядочения, а η_j и q_j векторы в R^d, размерность вспомогательного пространства d равна:

$$d = 2 + 2\rho + 4\rho l\,, \tag{2.6}$$

ρ – вариационный параметр, который связан с асимптотическим поведением волновой функций. Определим энергетический спектр с орбитальным и радиальным возбуждениями. В ОП волновая функция с радиальным возбуждением определяется в следующем виде:

$$|n_r\rangle = C_{n_r}\left(a^+a^+\right)^{n_r}|0\rangle, \tag{2.7}$$

где C_{n_r} -нормировочная константа, которая равна:

$$C_{n_r} = \left[\frac{\Gamma(d/2)}{4^{n_r}\, n_r!\,\Gamma(d/2+n_r)}\right]^{1/2}, \quad n = 1+\lambda+n_r, \tag{2.8}$$

а энергический спектр в R^d определяется следующим образом

$$\varepsilon(E) = \langle n_r|H|n_r\rangle = \varepsilon_0(E) + 2n_r\omega + \langle n_r|H_I|n_r\rangle. \tag{2.9}$$

Матричный элемент $\langle n_r|H_I|n_r\rangle$ имеет вид:

$$\langle n_r|H_I|n_r\rangle = -\frac{4\rho^2\mu E}{\omega^{2\rho-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+2\rho-1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\widetilde{B} + \frac{4\rho^2\mu\sigma}{\omega^{3\rho-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+3\rho-1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\widetilde{C}. \tag{2.10}$$

Детали вычисления матричного элемента (2.10) приведены в Приложении А, а параметры $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ представлены в (А.6) и (А.7) соответственно. Согласно ОП, энергетический спектр и частота осциллятора определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon(E) = 0 \\ \dfrac{\partial\varepsilon_0(E)}{\partial\omega} = 0 \end{cases}. \tag{2.11}$$

Прежде всего, определим энергетический спектр полного гамильтониана с орбитальным возбуждением. Тогда учитывая (2.4) из (2.11) имеем для ω-частоты осциллятора:

$$\omega^{\rho} = Z_0\cdot(\mu\sigma)^{1/3}; \quad Z_0 = \left[\frac{4\rho^2\Gamma(4\rho+2\rho l)}{\Gamma(2+\rho+2\rho l)}\right]^{1/3} \tag{2.12}$$

и для энергетического спектра

$$E(\lambda,0) = \min_{\rho}\frac{\sigma^{2/3}}{\mu^{1/3}}\cdot\left[\frac{Z_0^2}{8\rho^2}\cdot\frac{\Gamma(2+\rho+2\rho l)\Gamma^2(4\rho+2\rho l)}{\Gamma(3\rho+2\rho l)}\cdot\frac{1}{Z_0}\frac{\Gamma(4\rho+2\rho l)}{\Gamma(3\rho+2\rho l)}\right]. \tag{2.13}$$

В этом случае учитывая (2.12), (2.13), (1.8) из (1.7) получаем массу связанного состояния:

$$M(\lambda,0) = 2\sqrt{\sigma}\left[\frac{\Gamma^2(4\rho+2\rho l)\Gamma(2+\rho+2\rho l)}{\rho^2\Gamma^3(3\rho+2\rho l)}\right]^{1/4}. \tag{2.14}$$

Мы аналитически определили энергетический спектр и массу связанного состояния с орбитальным возбуждением для растущего потенциала. Далее приступаем к определению массового спектра с орбитальным и радиальным возбуждениями. После некоторых упрощений для частоты осциллятора, с учетом радиального возбуждения, имеем:

$$\omega_{n_r}^{\rho} = \omega^{\rho}\cdot D_1^{1/3}, \tag{2.15}$$

где ω^{ρ} представлена в (2.12). Для энергетического спектра получаем:

$$E(\lambda,n_r)=\frac{\sigma^{2/3}}{\mu^{1/3}}\cdot\min_{\rho}\left\{\left[\frac{\Gamma(2+\rho+2\rho l)\Gamma^2(4\rho+2\rho l)}{4\rho^2\mu^3\Gamma(3\rho+2\rho l)}\cdot\right]^{1/3}\cdot\frac{D_2D_1+2D_3}{2D_1^{1/3}}\right\}. \tag{2.16}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$D_1=\frac{\rho+(3\rho-1)\widetilde{B}-(2\rho-1)\widetilde{C}}{\rho+(2\rho-1)\dfrac{2n_r}{1+\rho+2\rho\lambda}+\dfrac{1}{2}\widetilde{B}};\; D_2=\left(1+\frac{4n_r}{1+\rho+2\rho\lambda}\right)+\frac{1}{1+\widetilde{B}};\; D_3=\frac{1+\widetilde{C}}{1+\widetilde{B}}. \tag{2.17}$$

В этом случае, согласно (1.7), масса связанного состояния определяется в виде:

$$M(\lambda,n_r)=2\sqrt{\sigma}\left[\frac{\Gamma^2(4\rho+2\rho l)\Gamma(2+\rho+2\rho l)}{D_1\rho^2\Gamma^3(3\rho+2\rho l)}\right]^{1/4}\cdot\left(\frac{D_2D_1+2D_3}{3}\right)^{3/4}. \tag{2.18}$$

Таким образом, мы аналитически определили массу связанного состояния с орбитальным и радиальным возбуждением мезонов, состоящих из легких кварков, при условии

$$\frac{m_a}{\sqrt{\sigma}}\cong\frac{m_d}{\sqrt{\sigma}}<<1, \tag{2.19}$$

где m_a и m_d – массы легких кварков.

2.2. Определение массового спектра мезонов, состоящих из легко-тяжелых кварков. Мы аналитически определили массовый спектр мезонов, состоящих из легко-легких кварков, с орбитальным и радиальным возбуждениями для линейно растущего потенциала. В этом пункте мы приступим к определению массового спектра мезонов, состоящих из легко-тяжелых кварков, и конституэнтной массы кварков с орбитальным и радиальным возбуждениями для этих потенциалов. В этом случае,

$$m_1=0,\; m_2=m_q\neq 0, \tag{2.20}$$

где m_q – масса, в частности, s-кварка. Прежде всего, вычислим массу и конституэнтную массу для растущего потенциала. Учитывая (2.10) и (2.9), из (2.11) определен энергетический спектр с орбитальным и радиальным возбуждениями, при этом масса и конституэнтная масса определяются из (1.7) и (1.8), соответственно. Тогда, после некоторых упрощений, для массы связанного состояния получаем:

$$M(\lambda,n_r)=\sqrt{\sigma}\left(\sqrt{\mu_0 s^2}+\sqrt{\xi^2+\mu_0 s^2}+\frac{s^2}{\sqrt{\mu_0}}\right), \tag{2.21}$$

и для конституэнтной массы кварков имеем:

$$\mu_1(1,n_r)=\sqrt{\sigma\mu_0 s^2};\; \mu_2(\lambda,n_r)=\sqrt{\sigma(\xi^2+\mu_0 s^2)}, \tag{2.22}$$

а энергетический спектр определяется в виде:

$$E(\lambda,n_r)=\frac{3}{2}\min_{\rho}\left(\frac{s^2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\mu_0}}\right). \tag{2.23}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\xi^2=\frac{m_q^2}{\sigma};\qquad \mu_0=\frac{1}{2}\frac{s^2-2\xi^2 s}{2s^3-\xi^2}+\sqrt{\frac{(s^4-2\xi^2 s)^2}{4(2s^3-2\xi^2)^2}+\frac{s^2\xi^2}{2s^3-\xi^2}};$$

$$s^2 = \frac{2}{3}\left[\frac{\Gamma^2(4\rho + 2\rho\lambda)\Gamma(2+\rho+2\rho\lambda)}{4\rho^2\mu^3 D_1 \cdot \Gamma(3\rho + 2\rho\lambda)}\right]^{\frac{1}{3}}\left(\frac{D_2 D_1 + 2D_3}{2}\right). \tag{2.24}$$

Для конституэнтной массы кварков имеем:

$$\mu_1(\lambda, n_r) = \sqrt{\sigma}\sqrt{-2x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}}\right)}, \quad \mu_2(\lambda, n_r) = \sqrt{\sigma}\sqrt{\xi^2 - 2x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}}\right)}. \tag{2.25}$$

При этом параметр x определяется из уравнения:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{-2\frac{d}{dx}\left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}}\right)}} - \frac{x}{\sqrt{\xi^2 - 2x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}}\right)}} = 0. \tag{2.26}$$

3. Определение массового спектра связанного состояния с учетом непертурбативной добавки.

3.1. Вычисление массового спектра связанного состояния с учетом вклада диаграммы собственной энергии. В методе полевых корреляторов взаимодействие составляющих частиц в связанном состоянии определяется выражением, представленным в (1.4). Из (1.4) видно, что недиагональное взаимодействие $W_{1,2}$ определяет взаимодействие между составляющими частицами, а в нерелятивистском пределе соответствует потенциалу взаимодействия [6]. Взаимодействие составляющих частиц в связанном состоянии определяется не только обменом глюонами между собой, а также взаимодействием частиц самих с собой, т.е. диаграммой собственной энергии, вклад которой определяется выражениями $W_{1,2}\,W_{2,2}$. В этом пункте излагаются детали определения вклада $W_{1,2}\,W_{2,2}$, т.е. вклада диаграммы собственной энергии в массовый спектр связанного состояния и конституэнтную массу. Учет вклада диаграммы собственной энергии приводит к тому, что появляется дополнительный гамильтониан, явный вид которого определен в работе [7]:

$$\Delta H_{SE} = -\frac{2\sigma}{\pi}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right), \tag{3.1}$$

где .... – конституэнтные массы составляющих частиц и σ натяжение струны. С учетом (3.1) для массового спектра связанного состояния, состоящего из легко-легких кварков, имеем:

$$M = 2\mu + E - \frac{2\sigma}{\pi\mu}. \tag{3.2}$$

В этом случае параметр м определяется из уравнения

$$2 + \frac{\partial E\mu}{\partial\mu} + \frac{2\sigma}{\pi\mu^2} = 0. \tag{3.3}$$

Массу связанного состояния, состоящего из легко-тяжелых кварков, определяем в виде:

$$\frac{M}{\sqrt{\sigma}} = \frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma}} + \frac{\mu_2}{\sqrt{\sigma}} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}}\right) + \frac{E}{\sqrt{\sigma}}, \tag{3.4}$$

где μ_1 и μ_2 – конституэнтные массы составляющих:

$$\frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma}} = \sqrt{-2x^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}}\right) + \frac{4}{\pi}}, \quad \frac{\mu_2}{\sqrt{\sigma}} = \sqrt{\xi^2 - 2x^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}}\right) + \frac{4}{\pi}}. \tag{3.5}$$

Здесь использована параметризация $\mu = x\sqrt{\sigma}$, параметр x определяется из уравнения:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{-2x^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}}\right)+\frac{4}{\pi}}}+\frac{1}{\sqrt{\xi^2-2x^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}}\right)+\frac{4}{\pi}}}, \tag{3.6}$$

а параметр ξ представлен в (2.24). Энергетический спектр Е для конкретного вида потенциала определяется из УШ, он был представлен в предыдущем пункте.

3.2. Вычисление массового спектра связанного состояния с учетом струнной добавки. Определение потенциала взаимодействия между составляющими частицами в связанном состоянии с обменом непертурбативными глюонами приводит к дополнительному взаимодействию, явный вид которого определен в работе [6]:

$$\Delta H_{str}=-\frac{4\alpha_s}{3r}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda(\lambda+1)}{\mu^2r^2}}}-1\right]. \tag{3.7}$$

Вклад этого взаимодействия в массовый спектр называется струнной добавкой [10, 11] и определяется различными методами. В частности, в работе [11] это взаимодействие определяется в рамках теории возмущений как малая поправка. Из (3.7) видно, что при $\lambda = 0$ вклад этого взаимодействия равен нулю. Если $\mu \gg 1$, то в (3.7) можно провести разложение по степеням малой величины. Разложение первого порядка соответствует результатам выше указанных авторов. Вклад взаимодействия (3.7) в энергетический спектр Е(μ) определяется с помощью ОП. Для простоты, определим струнную добавку к энергетическому спектру растущего потенциала. Энергия в нулевом приближении в ОП равна:

$$\varepsilon_0(E)=\frac{d\omega}{4}-\frac{4\rho^2E\mu\Gamma\left(\frac{d}{2}+2\rho-1\right)}{\omega^{2\rho-1}\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}+\frac{4\rho^2\sigma\mu\Gamma\left(\frac{d}{2}+3\rho-1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}+$$

$$+\frac{16\alpha_s\rho^2\mu\,\Gamma\left(\frac{d}{2}+\rho-1\right)}{3\omega^{\rho-1}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}-\frac{16\rho^2\alpha_s\mu\omega^{d/2+1}}{3\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\int_0^\infty du\frac{u^{d/2+2\rho-2}e^{-\omega u}}{\sqrt{u^{2\rho}+\lambda(\lambda+1)/\mu^2}}, \tag{3.8}$$

а гамильтониан взаимодействия в нормальной форме представляется в виде:

$$H_I=\int_0^\infty dx\int\left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d\cdot\exp\left\{-\eta^2(1+x)\right\}:e_2^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)}:\times$$

$$\times\left[-\frac{4\rho^2\mu}{\omega^{2\rho-1}}\cdot\frac{Ex^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)}+\frac{4\rho^2\mu}{\omega^{3\rho-1}}\cdot\frac{\sigma x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)}+\frac{16\alpha_s\rho^2\mu}{3\omega^{\rho-1}}\frac{x^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)}-\frac{16\rho^2\alpha_s\mu}{3}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{j=0}^\infty\frac{(-1)^j}{j!}\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^\infty d\tau\exp\left\{-\lambda(\lambda+1)\tau/\mu^2\right\}\frac{\tau^{j-1/2}}{\omega^{2\rho+2j\rho-1}}\frac{x^{-2\rho-2j\rho}}{\Gamma(1-2\rho-2j\rho)}\right] \tag{3.9}$$

Из системы уравнений (2.11) определим энергетический спектр и частоту осциллятора с учетом орбитального и радиального возбуждения. Масса и конституэнтная масса для связанного состояния определяются из (2.25) для легко-легких кварков, а из (3.4) – для легко-тяжелых кварков. Эти алгебраические уравнения решаются численным образом. Из табл. 1, 2 видно, что наши результаты хорошо согласуются с результатами других авторов. Вычисление поправки связанной со струнной добавкой и вклада диаграммы собственной энергий.

Таблица 1. **Масса мезонов и конституентная масса кварков с орбитальным и радиальным возбуждениями при δ = 0,19 Гэв**

n	0	1	2	3	4
$M_0(nS)$ [10, 11]	1,3394	1,9980	2,4985	2,9151	3,2797
Наш	1,4077	1,6978	1,7945	1,8397	1,8664
$\mu_0(nS)$ [10, 11]	0,3348	0,4995	0,6246	0,7289	0,8199
Наш	0,3519	0,4245	0,4486	0,4599	0,4665
$M_0(nP)$ [10, 11]	1,7924	2,3153	2,7505	3,1291	3,4682
Наш	1,8482	1,8521	2,0151	2,0841	2,1277
$\mu_0(nP)$ [10, 11]	0,4481	0,5788	0,6876	0,7823	0,8671
Наш	0,4620	0,4630	0,5038	0,5210	0,5319

Таблица 2. **Масса связанного состояния и конституэнтная масса кварков с орбитальным возбуждением с учетом струнной добавки и вклада собственной энергий**

λ	0	1	2	3	4	5
$M_C(L)$ [10, 11]	1,157	1,710	2,111	2,446	2,740	3,005
Наш	1,255	1,775	1,958	2,300	2,600	2,87
$\mu_C(L)$ [10, 11]	0,415	0,496	0,580	0,656	0,710	0,745
Наш	0,418	0,516	0,604	0,683	0,753	0,816
Δ_{str} [10, 11]	0	-0,051	-0,086	-0,112	-0,075	-0,068
Наш	0	-0,258	-0,173	-0,145	-0,101	-0,070
Δ_{SE} [10, 11]	-0,525	-0,439	-0,375	-0,332	-0,307	-0,282
Наш	-0,577	-0,468	-0,400	-0,354	-0,321	-0,296

Приложение А. **Вычисление матричного элемента $\langle n_r|H_I|n_r\rangle$ для различных видов потенциалов**

В этом пункте изложим некоторые детали вычисления матричного элемента $\langle n_r|H_I|n_r\rangle$:

$$\langle n_r|H_I|n_r\rangle = \int_0^\infty dx\left\{-\frac{4\rho^2\mu E}{\omega^{2\rho-1}}\cdot\frac{x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)}+\frac{4\rho^2\mu\sigma}{\omega^{3\rho-1}}\cdot\frac{x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)}\right\}\times$$

$$\times\left\langle n_r\left|\cdot\int\left(\frac{d\eta_1}{\sqrt{\pi}}\right)^d\cdot e^{-\tau^2(1+x)}:e_r^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)}:\right|n_r\right\rangle \tag{A.1}$$

Учитывая (2.7) и следующие представление

$$e^{-i(k\cdot a)} = P_v e^{-iv(k\cdot a)};$$

где действие P_v оператора определяется в следующем виде:

$$P_\upsilon const = 0,\ \ P_\upsilon \upsilon^n = 0,\ \ P_\upsilon \upsilon^n = 1 \qquad n.\phi\ 2\,;$$

и также соотношение:

$$\left(a^+a^+\right)^n = (-1)^n \frac{d^n}{d\beta^n} e^{-\beta\left(a^+a^+\right)}\Bigg|_{\beta=0} = (-1)^n \frac{d^n}{d\beta^n} \int_0^\infty \left(\frac{d\xi}{\sqrt{\pi}}\right)^d e^{-\xi-2i\sqrt{\beta}\left(a^+\xi\right)}\Bigg|_{\beta=0}, \quad (A.2)$$

после некоторых упрощений из (А.1) получаем

$$T_n(x) = \int\left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}}\right)^d \cdot e^{-\tau^2(1+x)}\left\langle n\right| : e_r^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)} : \left|n\right\rangle = P_v C_n^2 \frac{d^{2n}}{d\alpha^n\beta^n}\int\left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}^2}\right)^d \iint\left(\frac{d\xi_1}{\sqrt{\pi}}\right)^d\left(\frac{d\xi_2}{\sqrt{\pi}}\right)^d \cdot \quad (A.3)$$

$$\cdot\, e^{-\tau^2(1+x)-\xi_1^2-\xi_2^2}\left\langle 0\right| e^{-2i\sqrt{\alpha}(a\xi_1)} e^{-\tau^2(1+x)} \cdot e_r^{-iv\sqrt{2x}(a^+\eta)} e_r^{-iv\sqrt{2x}(a\eta)} e^{-2i\sqrt{\beta}(a^+\xi_{21})}\left|0\right\rangle\Big|_{\beta,\alpha}.$$

и окончательно

$$T_n(k) = \sum_{k=2}^{2n}\sum_{S=0}^{n}(-1)^k \frac{x^k}{(1+x)^{k+d/2}}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(n+d/2)}\cdot\frac{2^{2S-k}}{\Gamma(n-S+1)}\cdot\frac{\Gamma(k+n-S+d/2)}{\Gamma^2(k-S+1)\Gamma(2S-k+1)}\,. \quad (A.4)$$

Учитывая (А.3) подставляя (А.4) в (А.1) и проводя интегрирования по x из (А.1) имеем:

$$\left\langle n_r\right|H_I\left|n_r\right\rangle = -\frac{4\rho^2 E\mu}{\omega^{2\rho-1}}\frac{\Gamma(d/2+2\rho-1)}{\Gamma(d/2)}\widetilde{B} + \frac{4\rho^2\sigma\mu}{\omega^{3\rho-1}}\frac{\Gamma(d/2+3\rho-1)}{\Gamma(d/2)}\widetilde{C}\,. \quad (A.5)$$

Здесь

$$\widetilde{B} = -\frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)}\cdot\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-2\rho)}\cdot\sum_{k=2}^{2n_r}(-1)^k A_{n_r}(k)\frac{\Gamma(1+k-2\rho)}{\Gamma(k+d/2)} \quad (A.6)$$

и

$$\widetilde{C} = -\frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)}\cdot\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-3\rho)}\cdot\sum_{k=2}^{2n_r}(-1)^k A_{n_r}(k)\frac{\Gamma(1+k-3\rho)}{\Gamma(k+d/2)}\,, \quad (A.7)$$

где

$$A_{n_r}(k) = \sum_{k=2}^{2n_r}\frac{2^{2S-k}}{\Gamma(n_r-S+1)}\cdot\frac{\Gamma(k+n_r-S+d/2)}{\Gamma(k-S+1)\Gamma(2S-k+1)}\,. \quad (A.8)$$

Эти выражения (А.5)–(А.8) использованы для определения энергетического спектра гамильтониана с растущим потенциалом. Матричный элемент $\left\langle n_r\right|H_I\left|n_r\right\rangle$ для гамильтониана взаимодействия (2.5) вычисляется аналогичным образом:

$$\left\langle n_r \left| H_I \right| n_r \right\rangle = -\frac{4\rho^2 E\mu}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma\left(d/2+2\rho-1\right)}{\Gamma\left(d/2\right)} \tilde{B} + \frac{4\rho^2 \sigma\mu}{\omega^{3\rho-1}} \times$$
$$\times \frac{\Gamma\left(d/2+\rho-1\right)}{\Gamma\left(d/2\right)} \tilde{C} - \frac{16\rho^2 \alpha_s \mu}{3\omega^{\rho-1}} \frac{\Gamma\left(d/2+\rho-1\right)}{\Gamma\left(d/2\right)} \tilde{D}, \qquad \text{(A.9)}$$

где

$$\widetilde{D} = -\frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \cdot \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-\rho)} \cdot \sum_{k=2}^{2n_r} \left(-1\right)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-\rho)}{\Gamma(k+d/2)}. \qquad \text{(A.10)}$$

Используяя (A.9) мы определили энергетический спектр гамильтониана (2.5) с орбитальным и радиальным возбуждениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Quigg C., Rosner J.L.* // Phys. Rev. **56**, 167(1990).
2. *Shifman M.A., Vainshtain A.I., Zakharov V.I.* // Nucl. Phys. **B 147**, 385(1979).
3. *Dosch H.G.* // Phys. Lett. **B 190**, 177(1987); *Dosch H.G., Simonov Yu.A.* // Phys. Lett. **B 205**, 393(1988).
4. *Giacomo A.Di., Dosch H.G., Shevchenko V.I., Simonov Yu.A.* // Phys. Rep. **372**, 319 (2002); hep- ph/0007223.
5. *Simonov Yu.A.* // Nucl. Phys. **B 307**, 393(1988); *Simonov Yu.A., Tjon J.A.* // Ann. Phys. (New York), **228**(1993); ibid **300**, 54(2002).
6. *Динейхан М., Жаугашева С.А., Кожамкулов Т.А.* // ЯФ **68,** 350(2005); Few-Body Systems **37,** 49(2005).
7. *Simonov Yu.A.* // Phys. Lett. **B 515**, 137(2001).
8. *Feynman R.P., Hibbs A.P.* Quantum Mechanics and Path Integrals (Me Graw-Hill, New York, 1963).
9. *Dineykhan M., Efimov G.V., Ganbold G., Nedelko N.* Oscillator representation in quantum physics, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, **m 26,** (1995).
10. *Badalian A.M., Bakker B.L.G.* // Phys. Rev. **D 66**, 034025(2002).
11. *Badalian A.M., Bakker B.L.G., Simonov Yu.A.* // Phys. Rev. **D 66**, 034026(2002).

Резюме

Өрістік коррелятор әдісі шеңберінде мезондардың массалық спектріне пертурбативтік емес түзетулерді есептеудің баламалық варианттарының біреуі ұсынылған. Ішектік түзетудің орбиталдық кванттық саны және пертурбативтік емес қосымшаның орбиталдық кванттық санға тәуелділігі анықталған. Бұл қосымшалардың жеңіл кварктардан ғана тұратын мезондардың спектріне біршама үлес қосатындығы көрсетілген.

Summary

In this work shown one of the alternative variants of the determination of nonperturbative and string corrections to the mass spectrum of mesons in framework of the field correlator method. Determined the string correction that dependented of orbital quantum number and nonperturbative addition. Shown, that this addition gives essential contribution for mesons spectrum which consists of only light quarks.

Поступила 25.03.07г.