УДК 539.3

Н. И. МАРТЫНОВ, И. О. ФЕДОРОВ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБОБЩЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ВЕКТОРА В ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Краевые задачи кручения неоднородных анизотропных тел приведены к краевым задачам Римана–Гильберта обобщенного аналитического вектора. Обсуждаются схемы решения краевых задач.

Предложенный в работе [1] подход позволяет привести основные двумерные краевые задачи статики неоднородной изотропной упругой среды к краевым задачам Римана-Гильберта обобщенного аналитического вектора. Этот подход позволяет обобщить метод Мусхелишвили и его модификации на неоднородные среды, ослабить условия на гладкость упругих параметров, записать общее решение и многое другое. Для решения конкретных задач применим метод граничных интегральных уравнений. Следует отметить, что результаты [1] переносятся и на неоднородные анизотропные среды, о чем будет сообщено в ближайших публикациях.

В настоящей работе результаты [1] переносятся на задачи кручения неоднородных анизотропных тел. Обсуждаются схемы решения краевых задач.

Как известно, задача о чистом кручении призматического неоднородного анизотропного бруса описывается системой уравнений:

$$\sigma_{13x} + \sigma_{23y} = 0, \tag{1}$$

$$a_{45}\sigma_{23} + a_{55}\sigma_{13} = \vartheta(\varphi_x - y),$$
$$a_{44}\sigma_{23} + a_{45}\sigma_{13} = \vartheta(\varphi_y + x), \tag{2}$$

где σ_{13}, σ_{23} – компоненты тензора напряжений, $a_{ij} = a_{ij}(x, y), (i, j = 4,5)$ – упругие параметры (коэффициенты деформации), $\varphi = \varphi(x, y)$ – функция кручения, $\vartheta = const$ – относительный угол закручивания. При этом предполагается, что один конец бруса закреплен, а на другом, свободном, действуют усилия, приводящие к скручивающему моменту M. Кроме того, в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, нормальная к образующей бруса. Плоскость свободного торца принимается за плоскость Oxy, а ось Oz направлена параллельно образующей [2, 3].

Для простоты будем рассматривать односвязную область сечения D с границей Γ. Введем функцию напряжений:

$$\sigma_{13} = -\vartheta\psi_y, \sigma_{23} = \vartheta\psi_x. \tag{3}$$

Тогда (1) удовлетворяется автоматически, а (2) принимает вид:

$$-\varphi_y + a_{44}\psi_x - a_{45}\psi_y = x,$$
$$\varphi_x - a_{45}\psi_x + a_{55}\psi_y = y \tag{4}$$

Обычно задачу о чистом кручении решают либо в напряжениях, либо в перемещениях. В первом случае исключают функцию кручения φ:

$$(a_{44}\psi_x - a_{45}\psi_y)_x + (a_{55}\psi_y - a_{45}\psi_x)_y = 2, \tag{5}$$

во втором – функцию напряжений ψ:

$$\{A_{45}(\varphi_y + x) + A_{55}(\varphi_x - y)\}_x +$$
$$+ \{A_{44}(\varphi_y + x) + A_{45}(\varphi_x - y)\}_y = 0. \tag{6}$$

Здесь $A_{ij}(i, j = 4,5)$ – модули упругости, связанные с коэффициентами деформации соотношениями:

$$A_{44} = \frac{a_{55}}{\Delta}, A_{45} = -\frac{a_{45}}{\Delta}, A_{55} = \frac{a_{44}}{\Delta},$$

$$\Delta = a_{44}a_{55} - a_{45}^2 > 0.$$

К уравнениям (5) или (6) добавляют соответствующие граничные условия и необходимые соотношения для определения остальных неизвестных параметров [2, 3].

Обратимся теперь к соотношениям (4). Они выражают закон Гука, записанный через функции напряжений и кручения. Нетрудно видеть, что (4) представляют собой полные интегралы уравнений (5) и (6). Действительно, если ψ – решение (5), то общее решение (5) есть (4), и наоборот. То же самое справедливо и для уравнения (6). Поэтому решение краевых задач о кручении эквивалентно решению системы (4) – эллиптических уравнений первого порядка относительно ψ, φ с соответствующими краевыми условиями.

Хорошо известно, что теория аналитического вектора есть теория решений эллиптических систем уравнений первого порядка на плоскости. Она достаточно полно разработана [4–8]. Поэтому естественно воспользоваться результатами этой теории.

Перейдем к комплексным переменным с помощью соотношений:

$$W = \psi + i\varphi, z = x + iy, \bar{z} \equiv s = x - iy,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Тогда система уравнений (4) запишется в виде:

$$(p+1)W_S + (p-1)\overline{W}_S + q(W_Z + \overline{W}_Z) = z, \quad (7)$$

где

$$p = \frac{1}{2}(a_{44} + a_{55}), q = -\frac{1}{2}((a_{55} - a_{44}) + 2ia_{45}). \quad (7a)$$

Рассмотрим общий случай – плоскость упругой симметрии. Пусть $q \neq 0$ при $z \in \overline{D}$, $(\overline{D} = D \cup \Gamma)$. Рассмотрим уравнение (7) и его комплексно сопряженное уравнение. Из этой системы уравнений определим $W_S, \overline{W}_S$:

$$\vec{\chi}_S = C\vec{\chi}_Z + \vec{F}, \quad (8)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{\chi} = \begin{pmatrix} W \\ \overline{W} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ -C_{12} & C_{22} \end{pmatrix}, \vec{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \\
&C_{11} = \frac{1}{2\bar{q}}\left[(p-1)^2 - |q|^2\right], \\
&C_{12} = \frac{1}{2\bar{q}}\left[(p^2-1) - |q|^2\right], \\
&C_{22} = -\frac{1}{2\bar{q}}\left[(p+1)^2 - |q|^2\right], \\
&f_1 = \frac{1}{2\bar{q}}\left[\bar{q}z - (p-1)s\right], \\
&f_2 = -\frac{1}{2\bar{q}}\left[\bar{q}z - (p+1)s\right]
\end{aligned}\right\} \quad (8a)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее матрицы C имеет вид $|C - \lambda E| = 0$, где E – единичная матрица. Или в развернутой форме:

$$\lambda^2 + \frac{2p}{\bar{q}}\lambda + \frac{q}{\bar{q}} = 0. \quad (9)$$

Его корни:

$$\lambda_1 = \lambda = -\frac{q}{p+\sqrt{\Delta}}, \lambda_2 = \frac{1}{\bar{\lambda}} = -\frac{q}{p-\sqrt{\Delta}}. \quad (10)$$

То есть $\lambda_1, \bar{\lambda}_2$ симметричны относительно единичной окружности, при этом $|\lambda| < 1$. Обозначим через T, $\tilde{C}$ - матрицы:

$$T = \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\lambda}} \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где

$$a = ch\omega = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{\Delta} + \sqrt[-4]{\Delta}\right),$$

$$b = sh\omega = \frac{1}{2}\left(\sqrt[-4]{\Delta} - \sqrt[4]{\Delta}\right). \quad (11a)$$

Сделаем замену переменных:

$$\vec{U} = T\vec{\chi}, \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} u \\ \bar{u} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Тогда система уравнений (8) приводится к виду:

$$u_S - \lambda u_Z = (\lambda\omega_Z - \omega_S)\bar{u} + (af_1 - bf_2), \quad (13a)$$

$$\bar{u}_S - \frac{1}{\bar{\lambda}}\bar{u}_Z = \left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\omega_Z - \omega_S\right)u + (af_2 - bf_1). \quad (13б)$$

Уравнение, комплексно-сопряженное к (13б) есть уравнение (13а). Это следует из того, что корни характеристического уравнения симметричны относительно единичной окружности и равенства $a(f_1 + \lambda\bar{f}_2) = d(f_2 + \lambda\bar{f}_1)$, которое проверяется непосредственно.

На границе Г области D граничное условие для уравнения (13а) запишется в виде:

$$\mathrm{Re}\,u = (a-b)\psi = \sqrt[4]{\Delta}\psi = 0. \quad (13в)$$

Таким образом, задача о кручении анизотропного неоднородного призматического бруса свелась к задаче Римана-Гильберта (13а), (13в) для обобщенного аналитического вектора.

В случае постоянных упругих параметров, с учетом (11)–(13а), получаем представление общего решения типа С. Г. Лехницкого [2, 3]:

$$\psi = \operatorname{Re}\Phi(\eta) + \frac{(p+\sqrt{\Delta})^2}{4\Delta}|\eta|^2,$$

$$\varphi = \sqrt{\Delta}\operatorname{Im}\Phi(\eta), \qquad (14)$$

где $\Phi(\eta)$ – аналитическая функция аргумента $\eta = \lambda s + z$. В силу (13в), (14) на границе области известна действительная часть аналитической функции $\Phi(\eta)$. Тогда решение задачи о кручении можно записать в замкнутом виде, используя интеграл Шварца [4, 7].

Пусть система координат **Ox′y′z** получается поворотом системы координат **Oxyz** вокруг оси Oz на угол α_0. Используя результаты [2, 3], нетрудно получить выражения упругих параметров $\boldsymbol{p'}$, $\boldsymbol{q'}$ в новой системе координат через старые:

$$p' = p, \quad q' = q\times\exp(2i\alpha_0). \qquad (15)$$

Пусть тело ортотропное в замкнутой области $\overline{D}$. Тогда в главных осях анизотропии $a_{45} = 0$ корни характеристического уравнения действительные, причем $|\lambda| < 1$. Нетрудно показать, что корни характеристического уравнения в системах координат **Ox′y′z, Oxyz** связаны соотношением: $\lambda' = \lambda e^{2i\alpha_0}$. Т.е. структура корней не изменяется: происходит их поворот вокруг оси Oz на угол $2\alpha_0$.

Рассмотрим трансверсально-изотропное (изотропное) тело. В главных осях анизотропии $a_{44} = a_{55} = \dfrac{1}{\mu}$, $a_{45} = 0$, где μ – модуль сдвига. В силу (15), $q' = 0, p' = p$. Поэтому в любой системе координат корни характеристического уравнения (записанного в действительных переменных) не зависят от упругих параметров и равны $\pm i$. Сделаем замену переменных:

$$W = \frac{(1+p)}{\sqrt{p}}V + \frac{(1-p)}{\sqrt{p}}\overline{V}. \qquad (16)$$

Тогда уравнение (7) и граничное условие (13в) в новых переменных примут вид:

$$V_S = \frac{p_S}{2p}\overline{V} + \frac{z}{4\sqrt{p}}, \quad \operatorname{Re}V|_{\Gamma} = 0. \qquad (17)$$

Т.е. задача о кручении опять свелась к краевой задачи Римана-Гильберта для обобщенного аналитического вектора. Исключая из (4) функцию кручения φ, получим уравнение для функции напряжений ψ трансверсально-изотропного тела:

$$\psi_{ZS} + e_Z\psi_S + e_S\psi_Z = \frac{1}{2p}, \quad e = \frac{1}{2}\ln p, \qquad (18)$$

$$\psi|_{\Gamma} = 0. \qquad (18а)$$

Так как в левой части (18) отсутствует член с ψ, то, согласно [5], существует функция Грина для уравнения(18). Нетрудно проверить, что $G(z,\varsigma,t,\tau) = \sqrt{p(z,\varsigma)}/\sqrt{p(t,\tau)}$ представляет собой функцию Римана для уравнения (18). Поэтому, используя результаты [5], можно построить функцию Грина и записать решение краевой задачи (18), (18а) в замкнутом виде.

Система уравнений (4) приводится к каноническому виду с помощью замены независимых переменных:

$$\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y),$$

$$\zeta = \xi + i\eta, J = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x,$$

осуществляющейся с помощью основного геоморфизма [4]:

$$\varsigma_S - q_*\varsigma_Z = 0, q_* = \frac{a_{44} - \sqrt{\Delta} - 2ia_{45}}{a_{44} + \sqrt{\Delta} + 2ia_{45}}. \qquad (19)$$

В новых переменных система (4) запишется в виде:

$$\left.\begin{aligned} -\varphi_\eta + \sqrt{\Delta}\psi_\xi \quad & \frac{1}{J}\left(= x\xi_x + y\xi_y\right) \\ \varphi_\xi + \sqrt{\Delta}\psi_\eta \quad & \frac{1}{J}\left(= x\eta_x + y\eta_y\right) \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Общее решение (20) может быть записано через $p = \sqrt{\Delta}$ – аналитические функции[8]. Если сделать замену $W^* = \sqrt{\Delta}\psi + i\varphi$, то (20) примет вид:

$$W^*_{\bar{\varsigma}} = \frac{1}{2}\frac{\partial\sqrt{\Delta}}{\partial\bar{\varsigma}}\left(W^* + \overline{W}^*\right) + F, F = \frac{z + sq_*}{2\left(1 - |q_*|^2\right)\bar{\varsigma}_S}.$$

При замене $W^0 = \sqrt[4]{\Delta}\psi + i\varphi/\sqrt[4]{\Delta}$ (20) переходит в уравнение (21):

$$W_{\bar{\varsigma}}^{0} = \delta_{\varsigma}\overline{W}^{0} + \frac{F}{\sqrt[4]{\Delta}}, \delta = \frac{1}{4}\ln\Delta. \qquad (21)$$

Если из системы уравнений (20) исключить φ, то получим уравнение (18), в котором необходимо заменить e на δ. Следовательно, решение полученного уравнения можно записать в замкнутом виде. Заметим, что основной геоморфизм (19) осуществляется методом последовательных приближений [4].

Для того, чтобы не накладывать дополнительных условий на гладкость упругих параметров, уравнение (7) исследуют непосредственно. Коэффициенты $a_{i,j}(i, j = 4{,}5)$ предполагаются ограниченными измеримыми функциями, удовлетворяющими условию эллиптичности. Для реальных упругих неоднородных анизотропных сред эти условия выполняются автоматически. Исключая из уравнения (7) и его комплексно сопряженного уравнения $\overline{W}_Z$, получим уравнение:

$$W_S - q_1 W_Z - q_2 \overline{W}_S = \frac{(p+1)z - qs}{\Delta_*}, \qquad (22)$$

где

$$\Delta_* = 1 + \Delta + (a_{44} + a_{55}),$$

$$q_1 = \frac{(a_{55} - a_{44}) + 2ia_{45}}{\Delta_*},$$

$$q_2 = \frac{1-\Delta}{\Delta_*}, |q_1| + |q_2| < q_0 < 1.$$

Аппарат решений уравнения (22) при различных граничных условиях достаточно полно разработан и осуществляется с помощью интегральных уравнений по области (см. [4] и там же библиографию по этому вопросу). Это существенно расширяет класс обобщенных решений и позволяет унифицировать класс задач из составных материалов с изменяющейся по области анизотропией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартынов Н.И.* Применение теории обобщенного аналитического вектора к решению статических задач неоднородной изотропной среды. Международная научная конференция «Суверенный Казахстан: 15-летний путь развития космической деятельности», посвященный 70-летию академика У. М. Султангазина. 2006. С. 62-65.

2. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

3. *Лехницкий С.Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971. 240 с.

4. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 509 с.

5. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 296 с.

6. *Боярский Б.В.* Теория обобщенного аналитического вектора // Annales Polonici Mathematicy. 1960. V. 17. P. 281-320.

7. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

8. *Положий Г.Н.* Теория и применение p-аналитических и (p,q) аналитических функций. К., 1973. 423 с.

Резюме

Бір текті емес анизотропты денелердің айналуының шекаралық есептері жалпыланған аналитикалық векторінің Риман-Гильберттің шекаралық есептеріне келтірілді. Шекаралық есептерді шешудің сұлбалары талқыланды.

Summary

The boundary problems of non-homogenous anisotropic body twisting reduced to the Riemann–Hilbert generalized analytic vector boundary problems. The solution schemes of boundary problems are considered.

Институт космических исследований
МОН РК, г. Алматы

Поступила 28.03.07г.