УДК 517.925

Н. А. ОРШУБЕКОВ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ИТЕРИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Решается задача Коши для любого порядка итерации оператора теплопроводности с помощью суммы потенциалов, в качестве ядер которых выступают квазифундаментальные (линейно-независимые) решения уравнения.

Итерированные уравнения стали предметом изучения многих математиков. В работах [1, 2] для квазилинейного бипараболического уравнения решены обобщенные задачи Коши, Коши-Дирихле с помощью метода последовательных приближений и сведения к интегральному уравнению. Так же известны результаты решения данных задач с помощью построения функции Грина [3], в качестве ядра которой берется фундаментальное решение уравнения теплопроводности. В данной работе решение ищется в виде суммы потенциалов Коши, ядрами которых являются квазифундаментальные решения итерированного уравнения теплопроводности.

Постановка задачи. В области $D = \{t > 0,\ (x, y) \in R^2\}$ ищем решение m-ой итерации уравнения теплопроводности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)^m u(t, x, y) = 0\,, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным данным вида

$$\lim_{t \to 0} \frac{\partial^{s-1} u(t, x, y)}{\partial t^{s-1}} = f_s(x, y),\ s = \overline{1, m}\,, \tag{2}$$

здесь и далее введено обозначение $\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)^m=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)^{m-1}\right\}$.

Решение задачи ищем в виде

$$u(t,x,y)=\sum_{q=0}^{m-1}\iint_{R^2}\nu_q(\xi,\eta)Z_q(t,x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta\,, \tag{3}$$

где $Z_q(t,x,y)=\frac{1}{4\pi q!\,t^{1-q}}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$, $q=\overline{0,(m-1)}$, $\nu_q(x,y)$ – достаточно гладкие функции.

Очевидно, что представление (3) является решением уравнения (1). Поэтому определим неизвестные плотности $\nu_q(x,y)$, $q=\overline{0,(m-1)}$ так, чтобы имело место начальные условия (2).

Для прозрачности дальнейших вычислений сформулируем следующие Леммы.

Лемма 1. Для целых чисел $0\le q\le k\le m-1$ справедливо

$$\frac{\partial^k Z_q(t,x,y)}{\partial t^k}=\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^{k+s}C_k^s\prod\limits_{i=s+1}^{k}(i-q)\rho^{2s}}{4^s t^{s+k}}Z_q(t,x,y),$$

здесь $\prod\limits_{i=n}^{p}i=1$ если $p<n$, $\rho^2=\rho^2(x,y)=x^2+y^2$.

Лемма 2. Для любых целых чисел $k,p_1,p_2\ge 0$ и точек $(x,y)\in R^2$ справедливы

$$\iint_{R^2}x^{2p_1}y^{2p_2}\left(x^2+y^2\right)^k e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{C_{2p_2}^{p_2}(p_1+p_2+k)!(2p_1-1)!!}{2^{p_1+2p_2}\prod\limits_{i=1}^{p_1}(p_2+i)}\pi\,.$$

Лемма 3. Если $k\ge 0$ – целое и хотя бы одна из целых чисел i,j – нечетное, тогда имеет место равенство

$$\iint_{R^2}x^i y^j\left(x^2+y^2\right)^k e^{-x^2-y^2}dxdy=0\,.$$

Лемма 4. Имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k k^p=\begin{cases}0, & \text{при}\, p<n,\\ n!, & \text{при}\, p=n,\end{cases}$$

где $1\le p\le n$, C_n^k – биномиальные коэффициенты.

Вернемся к задаче. При $k=\overline{0,(m-1)}$ рассмотрим выражение

$$\frac{\partial^k u(t,x,y)}{\partial t^k}=\sum_{q=0}^{m-1}\iint_{R^2}\nu_q(\xi,\eta)\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left\{Z_q(t,x-\xi,y-\eta)\right\}d\xi d\eta=\sum_{q=0}^{m-1}J_q^k(t,x,y),$$

где

$$J_q^k(t,x,y)=\sum_{s=0}^{k}\iint_{R^2}\nu_q(\xi,\eta)\frac{(-1)^{k+s}C_k^s\prod\limits_{i=s+1}^{k}(i-q)\rho^{2s}}{4^s t^{s+k}}Z_q(t,x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta\,.$$

Тогда в силу леммы 1 получаем

$$\frac{\partial^k u(t,x,y)}{\partial t^k}=\sum_{q=0}^{m-1}\lim_{t\to 0}\left\{J_q^k(t,x,y)\right\}=\sum_{q=0}^{k}\lim_{t\to 0}\left\{J_q^k(t,x,y)\right\}.$$

Рассмотрим отдельно

$$\lim_{t\to 0}\left\{J_q^k(t,x,y)\right\}=\frac{1}{\pi q!}\lim_{t\to 0}\frac{\sum\limits_{s=q}^{k}(-1)^{k+s}C_k^s\prod\limits_{i=s+1}^{k}(i-q)\iint\limits_{R^2}\nu_q\left(x-2\sqrt{t}z,y-2\sqrt{t}\theta\right)\left(z^2+\theta^2\right)^s e^{-z^2-\theta^2}dzd\theta}{t^{k-q}},\tag{4}$$

здесь и далее $z=\dfrac{x-\xi}{2\sqrt{t}},\ \theta=\dfrac{y-\eta}{2\sqrt{t}}$.

Предельное соотношение (4) в силу леммы 3 является неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. Избавиться от нее получается лишь после 2(*k*–*q*)-кратного применения правила Лопиталя

$$\lim_{t\to 0}\left\{J_q^k(t,x,y)\right\}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sum\limits_{s=q}^{k}(-1)^{k+s}C_k^s\prod\limits_{i=s+1}^{k}(i-q)\iint\limits_{R^2}\left(-z\frac{\partial}{\partial\xi}-\theta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^{2(k-q)}\nu_q(\xi,\eta)\left(z^2+\theta^2\right)^s e^{-z^2-\theta^2}dzd\theta}{\pi q!\prod\limits_{j=0}^{k-q-1}(k-q-j)\left(k-q-j-\frac{1}{2}\right)},$$

где $\xi=x-2\sqrt{t}z,\ \eta=y-2\sqrt{t}\theta$.

Переписав последнее выражение с помощью лемм 2, 4 имеем

$$\lim_{t\to 0}\left\{J_q^k(t,x,y)\right\}=(-1)^{k+q}C_k^q\Delta^{k-q}\left(\nu_q(x,y)\right).$$

Откуда наконец получаем систему

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\partial^k u(t,x,y)}{\partial t^k}\right\}=\sum_{q=0}^{k}(-1)^{k+q}C_k^q\Delta^{k-q}\left(\nu_q(x,y)\right)=f_k(x,y),k=\overline{0,(m-1)},$$

решая которую и определяем неизвестные плотности

$$\nu_k(x,y)=\sum_{n=0}^{k}C_k^n\Delta^n f_{k-n}(x,y),\quad k=\overline{0,(m-1)}.\tag{5}$$

Нами доказана

Теорема. Если функции $f_k(x,y)\in D_{x,y}^{2m-2-2k}\left(R^2\right),\ k=\overline{0,(m-1)}$ решение задачи Коши (1), (2) записывается в явном виде (3), где неизвестные плотности $\nu_k(x,y)$ потенциалов определяются по формуле (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зерагия П.К.* Труды Тбилисского гос. университета. 76. 87-95. 1959.
2. *Зерагия П.К.* Труды Тбилисского матем. института АН ГрузССР. 24. 195-221. 1957.
3. *Сулханишвили Г.И.* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 12. С. 2258-2266.

Резюме

Өзектері ретінде жылу өткізгіштік теңдеуінің квазиіргелі (сызықты тәуелсіз) шешімдері алынған потенциалдар қосындысы көмегімен кез келген ретті итерацияланған жылу өткізгіштік теңдеуіне қойылған Коши есебі шығарылған.

Summary

The Cauchy problem is solved for every order of iteration of heat-conduction operator by means of sum of potentials having quasifundamental (linear-independent) equation solutions as their kernels.

Казахский национальный
университет им. аль-Фараби

Поступила 16.04.07г.