УДК 517.946

А. В. РОГОВОЙ

О ЗАДАЧЕ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ СПЕЦИАЛЬНЫХ КОНТУРОВ

В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной: при $y < 0$ – характеристиками $AC: x + y = 0$ и $BC: x - y = 1$, а при $y > 0$ – кривой Ляпунова

$$\sigma_\delta = \left\{ (x, y): \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + \delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2, \quad y > 0 \right\},$$

рассматривается однородная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$\operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

$$u|_{AC \cup \sigma_\delta} = 0, \tag{2}$$

причем должны выполняться следующие условия «склеивания» решения на линии изменения типа уравнения $\{y = 0\}$

$$u(x, +0) = u(x, -0), \tag{3}$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0). \tag{4}$$

В работах [1, 2] для более общего уравнения Геллерстедта было показано существование разрывного решения задачи (1)–(4) при определенных условиях. Оказалось, что этот результат можно значительно усилить.

1. Случай $\delta = -\dfrac{1}{2}$.

Для данного случая кривая Ляпунова примет вид

$$\sigma_1 = \left\{ (x, y): \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad y > 0 \right\}. \tag{5}$$

Рассмотрим следующую функцию

$$u(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{1}{2} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2}{(1-x)^2 + y^2} = \dfrac{1 - x + y}{(1-x)^2 + y^2} - 1, & y > 0, \\ \dfrac{x + y}{1 - x - y} = \dfrac{1}{1 - x - y} - 1, & y < 0. \end{cases} \tag{6}$$

1) Учитывая представление функции (6) при $y < 0$, получим

$$u_{xx} - u_{yy} = \frac{2}{(1 - x - y)^3} - \frac{2}{(1 - x - y)^3} = 0,$$

так как $1 - x - y \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y \neq 1$ в Ω^-, то есть функция (6) удовлетворяет уравнению (1) при $y < 0$.

Из представления функции (6) при $y > 0$, получим

$$u_{xx}+u_{yy}=\frac{2(1-x)^3+6(1-x)^2y-6(1-x)y^2-2y^3}{\left((1-x)^2+y^2\right)^3}+\frac{-2(1-x)^3-6(1-x)^2y+6(1-x)y^2+2y^3}{\left((1-x)^2+y^2\right)^3}=0,$$

так как $\left((1-x)^2+y^2\right)^3\neq 0$ в Ω^+, то есть функция (6) удовлетворяет уравнению (1) при $y>0$. В итоге, функция (6) удовлетворяет уравнению (1) во всей области Ω.

2) Учитывая представление функции (6) при $y<0$ и при $y>0$, получим

$$u\,|_{AC}=u\,|_{x+y=0}=\left.\frac{x+y}{1-(x+y)}\right|_{x+y=0}=\frac{0}{1}=0,$$

$$u\,|_{\sigma_\delta}=u\,|_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}}=\left.\frac{\frac{1}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{(1-x)^2+y^2}\right|_{\frac{1}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0}=0,$$

то есть функция (6) удовлетворяет и гиперболической, и эллиптической части краевого условия (2).

3) Из представления функции (6) при $y<0$ и при $y>0$, получим

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\frac{1}{1-x}-1,\quad u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=\frac{1}{(1-x)^2},$$

так как $1-x\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\neq 1$ при $x\in AB(0,1)$, то есть функция (6) удовлетворяет условиям склеивания (3)–(4).

В итоге, функция (6) является решением задачи (1)–(4) для контура (5). Но, очевидно, функция (4) имеет разрыв в точке $B(1,0)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Существует разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контура (5), причем это решение представимо по формуле (6).

2. Случаи $\delta_1=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ и $\delta_2=-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Для данного случая кривая Ляпунова примет соответственно вид

$$\sigma_1=\left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2,\quad y>0\right\},\tag{7}$$

$$\sigma_2=\left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2,\quad y>0\right\}.\tag{7a}$$

Рассмотрим следующую функцию

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(1-x)^2+2(1-x)y-y^2}{\left((1-x)^2+y^2\right)^2}-2\dfrac{1-x+y}{(1-x)^2+y^2}+1, & y>0,\\[2ex] \dfrac{1}{(1-x-y)^2}-2\dfrac{1}{1-x-y}+1, & y<0.\end{cases}\tag{8}$$

Покажем, что она будет решением задачи (1)–(4), причем для обоих контуров (7) и (7а). Аналогично предыдущему, имеем.

1) Учитывая представление функции (8) при $y<0$ и при $y>0$, получим

$$y<0:\ u_{xx}-u_{yy}=\frac{6}{(1-x-y)^4}-\frac{4}{(1-x-y)^3}-\frac{6}{(1-x-y)^4}+\frac{4}{(1-x-y)^3}=0,$$

$$y>0:\ u_{xx}+u_{yy}=6\frac{(1-x)^4+4(1-x)^3y-6(1-x)^2y^2-4(1-x)y^3+y^4}{\left((1-x)^2+y^2\right)^4}-$$

$$-4\frac{(1-x)^3+3(1-x)^2y-3(1-x)y^2-y^3}{\left((1-x)^2+y^2\right)^3}-6\frac{(1-x)^4+4(1-x)^3y-6(1-x)^2y^2-4(1-x)y^3+y^4}{\left((1-x)^2+y^2\right)^4}+$$

$$+4\frac{(1-x)^3+3(1-x)^2y-3(1-x)y^2-y^3}{\left((1-x)^2+y^2\right)^3}=0,$$

то есть функция (8) удовлетворяет уравнению (1) во всей области Ω.

2) Учитывая представление функции (8) при $y<0$, получим

$$u\,|_{AC}=u\,|_{x+y=0}=\left.\left(\frac{x+y}{1-(x+y)}\right)^2\right|_{x+y=0}=\left(\frac{0}{1-0}\right)^2=0,$$

то есть функция (8) удовлетворяет гиперболической части краевого условия (2).

Учитывая представление функции (8) при $y>0$ и преобразовав его, получим

$$u(x,y)=\frac{\left((1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(1+\sqrt{2}\right)y\right)\left((1-x)^2+y^2-(1-x)+\left(\sqrt{2}-1\right)y\right)}{\left((1-x)^2+y^2\right)^2}.$$

Но, преобразовав выражения (7) и (7а) для контуров σ_1 и σ_2, получим

$$\sigma_1:\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2\quad\Leftrightarrow\quad (1-x)^2+y^2-(1-x)+\left(\sqrt{2}-1\right)y=0,$$

$$\sigma_2:\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2\quad\Leftrightarrow\quad (1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(1+\sqrt{2}\right)y=0.$$

Следовательно,

$$u\,|_{\sigma_1}=\left.\frac{\left((1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(1+\sqrt{2}\right)y\right)\left((1-x)^2+y^2-(1-x)+\left(\sqrt{2}-1\right)y\right)}{\left((1-x)^2+y^2\right)^2}\right|_{(1-x)^2+y^2-(1-x)+\left(\sqrt{2}-1\right)y=0}=0,$$

$$u\,|_{\sigma_2}=\left.\frac{\left((1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(1+\sqrt{2}\right)y\right)\left((1-x)^2+y^2-(1-x)+\left(\sqrt{2}-1\right)y\right)}{\left((1-x)^2+y^2\right)^2}\right|_{(1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(1+\sqrt{2}\right)y=0}=0,$$

то есть функция (8) удовлетворяет и эллиптической части краевого условия (2), причем для обоих контуров σ_1 и σ_2. Таким образом, функция (8) удовлетворяет краевому условию (2) для обоих контуров σ_1 и σ_2.

3) Учитывая представление функции (8) при $y < 0$ и при $y > 0$, получим

$$u(x,+0) = u(x,-0) = \frac{1}{(1-x)^2} - 2\frac{1}{1-x} + 1, \qquad u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{2}{(1-x)^2},$$

т. е. функция (8) удовлетворяет условиям склеивания (3)–(4).

В итоге, функция (8), имеющая разрыв в точке $B(1,0)$, является решением задачи (1)–(4) для контуров (7) и (7а). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Существует разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контуров (7) и (7а), причем для обоих контуров это решение представимо по формуле (8).

3. Случаи $\delta_1 = \dfrac{1}{2}$, $\delta_2 = -\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$, $\delta_3 = -\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Для данного случая кривая Ляпунова примет вид

$$\sigma_1 = \left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},\quad y>0\right\}, \tag{9}$$

$$\sigma_2 = \left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2,\quad y>0\right\}, \tag{9а}$$

$$\sigma_3 = \left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2,\quad y>0\right\}. \tag{9б}$$

Рассмотрим следующую функцию

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{\left((1-x)^2+y^2\right)^3} - 3\dfrac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{\left((1-x)^2+y^2\right)^2} + 3\dfrac{1-x+y}{(1-x)^2+y^2} - 1, & y>0, \\ \dfrac{1}{(1-x-y)^3} - \dfrac{3}{(1-x-y)^2} + \dfrac{3}{1-x-y} - 1, & y<0. \end{cases} \tag{10}$$

Имеем.

1) Учитывая представление функции (10) при $y < 0$ и при $y > 0$, получим

$$y<0:\ u_{xx} - u_{yy} = \frac{12}{(1-x-y)^5} - \frac{18}{(1-x-y)^4} + \frac{6}{(1-x-y)^3} - \frac{12}{(1-x-y)^5} + \frac{18}{(1-x-y)^4} - \frac{6}{(1-x-y)^3} = 0,$$

$$y>0:\ u_{xx} + u_{yy} = 12\frac{(1-x)^5 + 5(1-x)^4 y - 10(1-x)^3 y^2 - 10(1-x)^2 y^3 + 5(1-x)y^4 + y^5}{\left((1-x)^2+y^2\right)^5} -$$

$$-18\frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4}{\left((1-x)^2+y^2\right)^4} + 6\frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{\left((1-x)^2+y^2\right)^3} -$$

$$-12\frac{(1-x)^5+5(1-x)^4y-10(1-x)^3y^2-10(1-x)^2y^3+5(1-x)y^4+y^5}{\left((1-x)^2+y^2\right)^5}+$$

$$+18\frac{(1-x)^4+4(1-x)^3y-6(1-x)^2y^2-4(1-x)y^3+y^4}{\left((1-x)^2+y^2\right)^4}-6\frac{(1-x)^3+3(1-x)^2y-3(1-x)y^2-y^3}{\left((1-x)^2+y^2\right)^3}=0,$$

то есть функция (10) удовлетворяет уравнению (1) во всей области Ω.

2) Учитывая представление функции (10) при $y<0$, получим

$$u\,|_{AC}=u\,|_{x+y=0}=\left(\frac{x+y}{1-(x+y)}\right)^3\Bigg|_{x+y=0}=\left(\frac{0}{1-0}\right)^3=0,$$

то есть функция (10) удовлетворяет гиперболической части краевого условия (2).

Учитывая представление функции (10) при $y>0$ и преобразовав его, получим

$$u(x,y)=-\frac{\left((1-x)^2+y^2-(1-x)+y\right)\left((1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(2-\sqrt{3}\right)y\right)\left((1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(2+\sqrt{3}\right)y\right)}{\left((1-x)^2+y^2\right)^3}.$$

Но, преобразовав выражения (9), (9а) и (9б) для контуров σ_1, σ_2 и σ_3, получим

$$\sigma_1:\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad (1-x)^2+y^2-(1-x)+y=0,$$

$$\sigma_2:\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2\quad\Leftrightarrow\quad (1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(2-\sqrt{3}\right)y=0,$$

$$\sigma_3:\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2\quad\Leftrightarrow\quad (1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(2+\sqrt{3}\right)y=0.$$

Следовательно,

$$u\,|_{\sigma_1}=-\frac{\left((1-x)^2+y^2-(1-x)+y\right)\left((1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(2-\sqrt{3}\right)y\right)\left((1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(2+\sqrt{3}\right)y\right)}{\left((1-x)^2+y^2\right)^3}\Bigg|_{(1-x)^2+y^2-(1-x)+y=0}=0,$$

$$u\,|_{\sigma_2}=-\frac{\left((1-x)^2+y^2-(1-x)+y\right)\left((1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(2-\sqrt{3}\right)y\right)\left((1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(2+\sqrt{3}\right)y\right)}{\left((1-x)^2+y^2\right)^3}\Bigg|_{(1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(2-\sqrt{3}\right)y=0}=0,$$

$$u\,|_{\sigma_3}=-\frac{\left((1-x)^2+y^2-(1-x)+y\right)\left((1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(2-\sqrt{3}\right)y\right)\left((1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(2+\sqrt{3}\right)y\right)}{\left((1-x)^2+y^2\right)^3}\Bigg|_{(1-x)^2+y^2-(1-x)-\left(2+\sqrt{3}\right)y=0}=0,$$

то есть функция (10) удовлетворяет и эллиптической части краевого условия (2), причем для всех контуров σ_1, σ_2 и σ_3.

3) Учитывая представление функции (10) при $y<0$ и при $y>0$, получим

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\frac{1}{(1-x)^3}-\frac{3}{(1-x)^2}+\frac{3}{1-x}-1,\quad u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=\frac{3}{(1-x)^4}-\frac{6}{(1-x)^3}+\frac{3}{(1-x)^2},$$

то есть функция (10) удовлетворяет условиям склеивания (3)–(4).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Существует разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контуров (9), (9а) и (9б), причем для всех трех контуров это решение представимо по формуле (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Роговой А.В.* О гладкости решений задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта // Вестн. КазНУ им. аль-Фараби. Сер. мат., мех., информ. 2002. №5. С. 50-56.

2. *Роговой А.В.* Решение задачи Трикоми для уравнений смешанного типа методом преобразований Меллина: Автореф. дис. … к. физ.-мат. н. Шымкент, 2004. 26 с.

Резюме

Біртекті Трикоми есебі алты қисық Лаврентьев–Бицадзе теңдеуі қарастырады. Үзілісті шешім көрілген есепте әрбір берілген қисық үшін дәлелденген, ал шешімі тура құрастырылған.

Summary

Homogeneous Tricomi problem for Lavrentjev–Bitsadze equation for six special areas has been considered in the work. The existence of non continuous solution of this problem has been proved for all these areas, and this solution has been build.

Южно-Казахстанский гуманитарный институт
им. М. Сапарбаева, г. Шымкент

Поступила 10.04.07г.