УДК 530.1:517.958

Н. Ж. ТАКИБАЕВ

ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ЛЕГКОЙ И ДВУМЯ ТЯЖЕЛЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Введение. Как известно, свойства решений задач рассеяния двух частиц почти полностью определяются их характеристической силовой функцией – потенциалом взаимодействия. Если число частиц, участвующих в акте рассеяния, n > 2, то число таких характеристических функций будет равно n·(n-1)/2 или даже больше, если учесть потенциалы многочастичной природы. В таких задачах анализ свойств решений оказывается весьма затруднительным, а численные методы становятся громоздкими и трудоемкими [1, 2]. Так, даже в системе трех частиц, при учете только парных сил, определение решений возможно лишь в нескольких частных случаях, например, в пределе «резонанса в нуле» в системе трех тождественных частиц [3].

Метод эффективного потенциала взаимодействия оказывается во многих случаях удобным инструментом исследований. Эффективный потенциал, определенный для переходов между двумя фиксированными, начальным и конечным, состояниями (или, иначе говоря, каналами рассеяния), представляет собой ту характеризующую функцию, которая определяет свойства соответствующей амплитуды перехода. Определение такой функции, хотя и является промежуточным этапом на пути полного решения задачи, но может упростить поиск решения или предопределить его основные свойства. В ряде важных приложений решение задачи может быть проведено до конца, т. е. получено в аналитической форме.

Одной из таких задач является задача рассеяния легкой частицы на системе двух тяжелых частиц. Она касается проблем рассеяния легкой частицы на слабосвязанных системах, рассеяния частиц на кристаллах, и ее решение дает новые возможности изучения ряда задач атомной и молекулярной физики, и некоторых проблем астрофизики.

Метод эффективного потенциала взаимодействия изначально базируется на уравнениях Фаддеева [1]. Затем, уравнения Фаддеева для Т-матриц, преобразовываются к системе уравнений для элемента Т-матрицы, отвечающего фиксированному переходу и выраженному через эффективный потенциал, и уравнений для определения самого эффективного потенциала [4, 5].

Для эффективного потенциала, используя Фурье-преобразование, удается в пределе $\zeta \to 0$ получить решения в аналитической форме. Здесь и далее ζ = m/M, где m – масса легкой частицы, а M – масса тяжелой частицы. Найденные решения записываются в конечном виде и выражаются через обобщенные функции. Обратный переход к импульсному представлению не представляет особого труда и позволяет получить выражения для эффективного потенциала также в аналитическом виде.

Следуя методу эволюции по константе связи [6, 7], можно сформулировать теорию возмущений по параметру ζ и оценить поправки к полученному предельному решению. С другой стороны, аналитическое решение можно использовать как конструкцию для построения главного приближения в общей задаче рассеяния трех частиц, и определять к нему поправки методом последовательных итераций.

Метод эффективного потенциала. Рассмотрим задачу трех тел. Как известно, математически строгое решение трехтельных задач было дано Л. Д. Фаддеевым [1]. Обратимся к уравнениям Фаддеева для компонент полной Т-матрицы:

$$T_i(Z) = t_i + t_i G_0(Z) \sum_{j \neq i} T_j(Z)\ , \ i, j = 1,2,3\ , \quad (1)$$

где t_i – парные t-матрицы, $t_i = V_i + V_i G_0 t_i$, V_i – парные потенциалы взаимодействия, а T_i – компоненты полной Т-матрицы: $T = \sum T_i$. Для краткости записи, взаимодействующую пару частиц обычно помечают номером третьей частицы.

Формально, индекс *i* у компоненты T_i отвечает номеру пары, выживающей последней на асимптотике слева, т.е. отвечает номеру частицы, покидающей первой область взаимодействия.

Систему уравнений (1) можно переписать в матричной форме, если ввести индекс j и по асимптотике справа:

$$T_{ij}(Z) = t_i \cdot \delta_{ij} + t_i G_0(Z) \sum_{l \neq i} T_{lj}(Z), \qquad (2)$$

где $T = \sum_{i=1}^{3} T_i$ и $T_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}$.

Связь полной T-матрицы из (2) с трехчастичной S-матрицей и амплитудой можно получить из общего представления для S-матрицы в теории рассеяния. Запишем, например, матрицу рассеяния в форме:

$$S_{\mu\nu} = <\Psi_\mu^- | \Psi_\nu^+> = \delta_{\mu\nu} + 2\pi i \delta(E_\mu - E_\nu) f_{\mu\nu}, \qquad (3)$$

где $f_{\mu\nu} = -<\Psi_\mu^0 | \sum_i V_i \Psi_\nu^+>$, $|\Psi_\nu^\pm>$ есть точные волновые функции *in, out* состояний, $|\Psi_\nu^0>$ – свободная волновая функция. Выделяя асимптотики по парным взаимодействиям в *in* и *out* состояниях, полную амплитуду $f_{\mu\nu}$ можно представить в виде:

$$f_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}^i \cdot \delta_{ij} + \sum_\sigma S_{\mu\sigma}^i <\psi_\sigma^{i+} | \sum_{l \neq i} T_{lj,\nu}>, \qquad (4)$$

где $S_{\mu\nu}^i = <\psi_\mu^{i-} | \psi_\nu^{i+}>$ и $f_{\mu\nu}^i$ – двухчастичные S-матрица и амплитуда пары номера i, а трехчастичные величины $T_{lj,\nu} = T_{lj} | \Psi_\nu^0> = V^l | \Psi_{j,\nu}^+>$ будет решениями уравнений (2).

При исследовании особенностей взаимодействия в определенных каналах, например, взаимодействия между кластерами, удобно использовать представление эффективного потенциала. Например, замкнутое уравнение для диагонального перехода T_{ii} можно получить, определяя эффективный потенциал в форме

$$V_{ii}^{ef} = (1 + G_0 t_i) G_0 \bar{\delta}_{il} (\delta_{kl} - t_k G_0 \bar{\delta}_{kl})^{-1} t_k G_0 \bar{\delta}_{ki} V_i, \qquad (5)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, а $\bar{\delta}_{ij} = I - \delta_{ij}$. Тогда, вводя связную амплитуду R_{ii} соотношением $T_{ii} = t_i + V_i R_{ii}$, получим:

$$R_{ii} = V_{ii}^{ef}(1 + G_0 t_i) + \sum_{i_s} V_{ii_s}^{ef} R_{i_s i}. \qquad (6)$$

В случае сепарабельных парных потенциалов, уравнения для амплитуд диагональных переходов и уравнения для самих эффективных потенциалов получаются в простой и компактной форме [4, 7]. Аналогичные упрощения возникают в случае разложения парных потенциалов по собственным функциям и собственным значениям, или при сведении парных потенциалов и t-матриц к сумме сепарабельных членов [2].

Рассмотрим пример простых парных сепарабельных потенциалов взаимодействия: $V_i = |\nu_i > \lambda_i < \nu_i|$, где λ_i – константа связи. В этом случае парные t-матрицы определяются до конца и могут быть записаны в аналитическом виде:

$$t_i = |\nu_i > \eta_i < \nu_i|,$$

$$\eta_i^{-1} = 1/\lambda_i - <\nu_i | G_0 | \nu_i>. \qquad (7)$$

Используя для элементов T-матрицы представление в форме [7]:

$$T_{ij} = t_i \cdot \delta_{ij} + |\nu_i > \eta_i P_{ij} \lambda_j < \nu_j|, \qquad (8)$$

получим систему уравнений:

$$P_{ij} = \Lambda_{ij} + \sum_l \Lambda_{il} \eta_l P_{lj}, \qquad (9)$$

где потенциал Λ_{ij} является связной величиной, отличной от нуля только, когда i $\neq$ j,

$$\Lambda_{ij} = <\nu_i | G_0(Z) | \nu_j>, \quad i \neq j. \qquad (10)$$

Выделим канал i и запишем уравнение для амплитуды P_{ii} в терминах диагональных переходов, т.е. через эффективный потенциал:

$$P_{ii} = V_{ii}^{ef} + \sum_{i_s} V_{ii_s}^{ef} \eta_{i_s} P_{i_s i}, \qquad (11)$$

при этом эффективный потенциал будет определяться уравнением

$$V_{ii}^{ef} = \sum_{l,k} \Lambda_{il} \eta_l (I \cdot \eta^{-1} - \Lambda)_{lk}^{-1} \eta_k \Lambda_{ki},$$

$$l, k \neq i. \qquad (12)$$

Существенно, что в (12) при суммировании по промежуточным состояниям l и k состояния выделенного канала i исключаются.

Предел $\zeta \to 0$. Будем предполагать, что потенциалы взаимодействия между частицами имеют сепарабельный вид. Рассмотрим модельную задачу, где одна из частиц легкая, а две другие тяжелые, и берется предел $\zeta = m/M \to 0$, где

m – масса легкой частицы, а M – масса тяжелых частиц.

Определим параметры парных подсистем.

Полная энергия $Z = \sum_i p_{0i}^2 / m_i \to p_{01}^2 / m$, где $\vec{p}_{01} = \vec{p}_0$ – начальный импульс легкой частицы. Тяжелые частицы будут под номерами 2 и 3.

Парное взаимодействие между легкой и любой из тяжелых частиц принимает вид:

$$< \nu(\vec{q}_{12}) | \to < \nu(\vec{p}) |, \; < \nu(\vec{q}_{13}) | \to < \nu(\vec{p}) |, \quad (13)$$

т. к. $\vec{q}_{12} = (m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2)/(m_1 + m_2) \to \vec{p}_1 = \vec{p}$.

Коэффициенты усиления в t-матрице этих пар η_2 и η_3 будет зависеть только от начальных параметров задачи (см. (7)), т.е. $\eta_2 = \eta_3 \to \eta(p_0)$.

Отметим, что парное взаимодействие между самими тяжелыми частицами в пределе $\zeta \to 0$ будет «исчезать», так как константа связи этого взаимодействия будет спадать ~ 1/M. Задача тогда еще более упрощается, поскольку одной из парных сил можно пренебречь. Это уже будет задача рассеяния легкой частицы на двух фиксированных центрах [8].

Однако, учет взаимодействия между тяжелыми частицами представляет значительный самостоятельный интерес для многих практических задач, например, в задаче рассеяния легкой частицы на слабосвязанной или резонансной системе, при учете кластерной структуры или иных особенностей рассеивающих центров, и т.п.

Взаимодействие между тяжелыми рассеивающими центрами нетрудно можно учесть в рамках подхода эффективного потенциала взаимодействия. Для этого достаточно выделить канал взаимодействия между тяжелыми частицами и, отделив в эффективном потенциале собственно взаимодействие тяжелых частиц между собой, определить решение для частной задачи рассеяния легкой частицы на тяжелых центрах. После того, как решение будет найдено, можно снова «включить» взаимодействие между тяжелыми частицами. Такая процедура математически корректным образом проводится в рамках подхода эффективного потенциала взаимодействия. Проведем ее в пределе $\zeta \to 0$.

Обратимся к эффективному потенциалу в (13). Будем считать выделенным канал 1, т.е. канал взаимодействия пары тяжелых частиц. Представим V_{11}^{ef} в следующем виде:

$$V_{11}^{ef} = \quad (14)$$

$$= \sum_{k,k'} < \nu_1 | G_0 | \nu_k > (\delta_{kk'} + \eta_k M_{kk'}) \eta_{k'} < \nu_{k'} | G_0 | \nu_1 >,$$

где $k, k' = 2,3$. Отметим, что внутренние суммирования в V_{11}^{ef} не содержат суммирования по выделенному состоянию номера 1.

Запишем теперь уравнение для величины $M_{kk'}$:

$$M_{kk'} = \Lambda_{kk'} + \Lambda_{kk''} \eta_{k''} M_{k''k'} . \quad (15)$$

Решение этого уравнения будем искать в форме разложения по параметру ζ:

$$M_{kk'} = M_{kk'}^0 + M_{kk'}^{(1)} \cdot \zeta + M_{kk'}^2 \cdot \zeta^2 / 2 + \Lambda ,$$

$$\text{где } M_{kk'}^{(n)} = \left\{ \frac{d^n}{d\zeta^n} M_{kk'} \right\}_{\zeta=0} . \quad (16)$$

Определим здесь решение в низшем приближении по ζ для $M_{kk'}^0 = M_{kk'}(\zeta = 0)$. Для оценки высших поправок можно использовать технику эволюции по константе связи, т.е. теорию возмущений по параметру ζ [6, 7].

Для потенциала $\Lambda_{kk'}$, следуя пределу при $\zeta \to 0$ для величин $\nu_k(\vec{k})$ и $G_0(Z)$ (см., например, (13)), получим

$$\Lambda_{kk'} = 2m \frac{\nu_k(\vec{p}) \cdot \nu_{k'}(\vec{p})}{(p_0^2 - p^2 + i\gamma)} = f(\vec{p}), \; \vec{p} = \vec{p}_1 , \quad (17)$$

причем $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$. Чтобы совместить это условие и потенциал $\Lambda_{kk'}$ из (17) в одном формальном выражении, используем тождественные преобразования:

$$\Lambda_{kk'} = \int d\vec{p} f(\vec{p}) \delta(\vec{p} - \vec{p}_1) =$$

$$= \int d\vec{p} f(\vec{p}) \delta(\vec{p} + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) =$$

$$= \iint d\vec{p} d\vec{r} f(\vec{p}) \exp\{ i\vec{r}(\vec{p} + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \}. \quad (18)$$

Отсюда нетрудно получить следующее представление:

$$\Lambda_{kk'} = \int d\vec{r} \exp(i\vec{r}\vec{p}_2) J(r; p_0) \exp(i\vec{r}\vec{p}_3) , \quad (19)$$

где

$$J(r;p_0)=\int d\vec{p}\exp(i\vec{r}\vec{p})\, f(\vec{p})\,. \qquad (20)$$

Определим далее $M(\vec{r}_2,\vec{r}_3)$ как Фурье-образ решения $M_{kk'}$:

$$M(\vec{r}_2,\vec{r}_3)= \qquad (21)$$

$$=\iint d\vec{p}_2 d\vec{p}_3 \exp(-i\vec{r}_2\vec{p}_2)M_{kk'}(\vec{p}_2,\vec{p}_3)\exp(i\vec{r}_3\vec{p}_3)\,,$$

и тогда из (15), с учетом соотношений (19), получим:

$$M(\vec{r}_2,\vec{r}_3)=\int d\vec{r}\delta(\vec{r}-\vec{r}_2)J(r;p_0)\delta(\vec{r}+\vec{r}_3)+$$

$$+\int d\vec{r}\delta(\vec{r}-\vec{r}_2)\,J(r;p_0)\eta(p_0)M(-\vec{r},\vec{r}_3)\,. \qquad (22)$$

Поскольку δ-функции снимают операции интегрирования справа в (22), то из него получается простое уравнение для $M(\vec{r}_2,\vec{r}_3)$:

$$M(\vec{r}_2,\vec{r}_3)= \qquad (23)$$

$$=J(r_2;p_0)\delta(\vec{r}_2+\vec{r}_3)+J(r_2;p_0)\eta(p_0)M(-\vec{r}_2,\vec{r}_3)\,.$$

В полученном уравнении связываются пространственно-сопряженные амплитуды $M(\vec{r}_2,\vec{r}_3)$ и $M(-\vec{r}_2,\vec{r}_3)$. Для прямой амплитуды $M(\vec{r}_2,\vec{r}_3)$ из уравнения (23) следует:

$$M(\vec{r}_2,\vec{r}_3)=K^0(\vec{r}_2,\vec{r}_3)+K(r_2)\eta(p_0)M(\vec{r}_2,\vec{r}_3)\,, \qquad (24)$$

где

$$K^0(\vec{r}_2,\vec{r}_3)=J(r_2;p_0)\delta(\vec{r}_2+\vec{r}_3)+$$

$$+J(r_2;p_0)\eta(p_0)J(-r_2;p_0)\,\delta(-\vec{r}_2+\vec{r}_3), \qquad (25)$$

и

$$K(\vec{r}_2)=J(r_2;p_0)\eta(p_0)J(-r_2;p_0)\,. \qquad (26)$$

Существенно, что решение уравнения (24) определяется в аналитической форме:

$$M(\vec{r}_2,\vec{r}_3)=\frac{K^0(\vec{r}_2,\vec{r}_3)}{1-K(r_2)\eta(p_0)}\,. \qquad (27)$$

Это соотношение в случаях, когда парные взаимодействия представляют собой сумму нескольких членов, нужно понимать как матричное по соответствующим индексам.

Из уравнения (23) можно определить четные и нечетные части общего решения, вводя обозначения:

$$M_+=M(\vec{r}_2,\vec{r}_3)+M(-\vec{r}_2,\vec{r}_3)\,,$$

$$M_-=M(\vec{r}_2,\vec{r}_3)-M(-\vec{r}_2,\vec{r}_3)\,. \qquad (28)$$

Уравнения для них принимают вид:

$$M_+=[\delta(\vec{r}_2+\vec{r}_3)+\delta(-\vec{r}_2+\vec{r}_3)]\cdot J(r_2;p_0)+$$

$$+J(r_2;p_0)\,\eta(p_0)M_+\,, \qquad (29)$$

$$M_-=[\delta(\vec{r}_2+\vec{r}_3)-\delta(-\vec{r}_2+\vec{r}_3)]\cdot J(r_2;p_0)-$$

$$-J(r_2;p_0)\,\eta(p_0)M_-\,, \qquad (30)$$

а решения будут равны

$$M_+=\frac{[\delta(\vec{r}_2+\vec{r}_3)+\delta(-\vec{r}_2+\vec{r}_3)]\cdot J(r_2;p_0)}{1-J(r_2;p_0)\,\eta(p_0)}\,, \qquad (31)$$

$$M_-=\frac{[\delta(\vec{r}_2+\vec{r}_3)-\delta(-\vec{r}_2+\vec{r}_3)]\cdot J(r_2;p_0)}{1+J(r_2;p_0)\,\eta(p_0)}\,. \qquad (32)$$

Соотношения (31) и (32) также нужно понимать как матричные при наличии нескольких компонент в парных взаимодействиях.

Из полученных решений (27) или (31) и (32) нетрудно теперь перейти к импульсному представлению и записать эффективный потенциал (14) в аналитической форме.

Важно отметить, что решение M_+ является симметричным, а M_- - антисимметричным относительно замены $\vec{r}_2\leftrightarrow-\vec{r}_2$. Это означает, что решение (32) можно быть использовано для определения Р-нечетных эффектов, которые могут получить значительное динамическое усиление вблизи резонансных точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Faddeev L.D.* Mathematical Aspects of the Three Body Problem in Quantum Scattering Theory. New York, 1965.

2. *Беляев В.Б.* Лекции по теории малочастичных систем. М.: Энергоатомиздат, 1986.

3. *Ефимов В.* // Ядерная физика. 1970. Т. 12. С. 1080.

4. *Такибаев Н.Ж., Пеньков Ф.М.* // Ядерная физика. 1989.Т. 50. С. 373.

5. *Pen'kov F., Takibayev N.* // Physics of Atomic Nuclei. 1994. V. 57, 1234.

6. *Киржниц Д.А., Крючков Г.Ю., Такибаев Н.Ж.* // ЭЧАЯ. 1979. Т. 10. С. 741.

7. *Takibayev N.Zh.* // Physics of Atomic Nuclei. 2005. V. 68, 1147.

8. *Baz' A.I., Zel'dovich Ya.B., Perelomov A.M.* Scattering, reactions, and decays in nonrelativistic quantum mechanics. Israel Program of Sci. Transl. Jerusalem, 1966.

Резюме

Релятивистік емес энергия үшін жеңіл және екі ауыр бөлшектердің арасындағы әсерлесудің нәтижелі әлеуеті анықталды. Жұп жүйешедегі сепарабелді әсерлесу кезіндегі және жеңіл бөлшек массасының ауыр бөлшек массасына қатынасы нөлге ұмтылған кездегі нәтижелі әлеуеті аналитикалық көрінісі табылды.

Summary

In this article is defined effective potential of interaction between light and two heavy particles for non-relativistic energy. Analytical forms of effecting potential in case of separable interactions in pair subsystems and at the attitude of mass light particle to heavy particle aspiring to zero are received.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Поступила 25.04.07г.